

BIBLIOTECA DI ARTIGLIERIA




BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadillo XXI

Num. d'ordine 25

Paichetto



13-5-27

NAZIONALE

B. Prov.

2116

NAPOLI

B. Grad.

I

2116

11
698318

Cours



de

Stabilité des Constructions,

à l'usage des Elèves de l'Ecole d'Application

De

l'Artillerie et du Génie.

Par N. Persy,

Professeur.



3^e Edition.



à Metz.

Lithographie de l'Ecole d'Application.

Septembre 1831.



Cours de Stabilité des Constructions.

Avant-propos.

De la science des Constructions

1). La science des Constructions, considérée dans toute son étendue, se fonde sur la plupart des sciences mathématiques et physiques et embrasse un grand nombre des arts qui se rattachent à leurs différentes branches.

De la théorie générale de leur Stabilité.

2). Un de ses principaux objets consiste dans l'application de la Mécanique soit à la solidité, soit à la Stabilité des divers édifices et comprend plusieurs théories; savoir, la résistance des solides, la stabilité des routes, celle des constructions tant en bois qu'en fer, celle des murs de revêtement, des digues &c.

De l'utilité de cette théorie.

3). Sans doute, les usages établis et l'exemple des ouvrages existants ou déjà exécutés, peuvent jusqu'à un certain point suppléer la théorie, du moins s'il ne s'agit que d'ouvrages semblables à ceux-là et qui n'en diffèrent ni dans les dimensions ni dans les poids; mais en ce cas même, on ne connaît ni les efforts que les parties supportent ni les résistances qu'elles peuvent opposer: réduit à une routine aveugle, on s'interdit désormais tout perfectionnement, et s'il s'agit d'édifice d'un genre nouveau, sur lequel l'expérience n'a rien appris, on est dans l'impuissance de l'exécuteur ou de concilier l'économie avec la solidité. La théorie au contraire devance l'expérience, elle dirige les Ingénieurs dans l'établissement des constructions quelconques et détermine avec toute l'exactitude nécessaire le degré de résistance dont chaque partie doit être pourvue.

Invention de son principe fondamental par Coulomb.

4). Euler avait émis l'idée très-philosophique, qu'il n'est aucune cause naturelle dont l'effet envisagé sous un certain aspect ne soit un maximum ou un minimum; Coulomb, imbu de la même idée, a ramené à la méthode des maximum et minimum la plupart des théories dont il s'agit et tels a soustraits ainsi à l'arbitraire auquel elles avaient été jusqu'alors abandonnées. Le mémoire très-remarquable de ce célèbre Ingénieur a été publié en 1773, dans le tome 7 du recueil des ouvrages présentés à l'Académie, par les Savants étrangers.

Nous développerons successivement ces théories d'après

les principes de Coulomb et en mettant à profit les recherches des autres Géomètres qui se sont occupés de la même matière.

Théorie de la résistance des Solides.

Preliminaire, 6.

De la Théorie particulière de
la résistance des Solides.

5). On sait que dans un corps solide les molécules intégrantes sont continuellement sollicitées par deux forces contraires, qui les maintiennent à certaines distances les unes des autres; savoir, la force d'attraction qui leur est propre, laquelle tend à les rapprocher et la force répulsive du calorique, laquelle tend à les écarter. C'est dans la considération de ces forces, ainsi que de la nature, la forme, la grandeur, la situation et tels distances respectives des molécules, qu'on trouve l'explication soit des différents états d'aggrégation, soit des diverses propriétés des corps, telles que la compressibilité, l'extensibilité, la flexibilité, l'élasticité, &c. et qu'on devrait chercher la solution directe des questions relatives à la résistance des solides. Mais, pour cela, il faudrait connaître exactement et les lois qui régissent ces forces et les circonstances qui influent sur leur action.

À défaut de cette connaissance, les Géomètres ont eu recours à des hypothèses secondaires, plus ou moins vraisemblables et telles que les résultats en faisoient non seulement abstr, simples, mais encore abstr, conformes aux phénomènes réels, pour qu'on pût les appliquer avec facilité et avec confiance aux différents cas de la pratique.

C'est d'ail rapide sur les commensur
ciments et les progrès.

6). Galilée à qui l'on doit les premières recherches théoriques sur la résistance des solides et les solides d'égale résistance, a supposé que les fibres (ou rangées longitudinales de molécules) qui composent les corps étoient susceptibles de se rompre, sans extension ni flexion sensibles.

Mariotte (Traité du mouvement des corps, 5^e partie) et Leibnitz, (Lettres de Leipzig, année 1682) ont regardé les fibres des corps, comme extensibles et capables d'une résistance proportionnelle à leur extension, c'est-à-dire, comme parfaitement élastiques; faisant néanmoins abstraction de la compressibilité dont ces fibres peuvent être doués.

Jacques Bernoulli (Académie de Paris, années 1705) après avoir remarqué, comme Mariotte, qu'en général, dans

la flexion des corps, parties des fibres s'étendent et parties se compriment, tandis que d'autres conservent une longueur invariable, propres d'avoir égard à la compression; dédaignant d'ailleurs et sans en produire d'autre, l'hypothèse de la résistance proportionnelle à l'extension ou à la compression, à cause, disait-il, de la conséquence absurde qu'une fibre pourrait être comprimée plus que de toute sa longueur. Mais il prit occasion de sa remarque pour déterminer la nature de la courbe qu'affecte une lame élastique en équilibre.

C'est sous le point de vue de Bernoulli que Coulomb a travaillé, dans le mémoire cité, la résistance des solides.

Ces recherches concernaient seulement la résistance qu'opposent à la rupture les corps tendus suivant leur longueur ou qui sont soumis à un effort transversal et sont assujettis de différentes manières; Euler (*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; appendix (x)) ayant perfectionné la théorie des courbes élastiques, qui fut encore approfondie dans la suite par Lagrange, (Académie de Berlin, 1763; de Turin, 1770-1773), on déduisit les moyens de déterminer la résistance qu'opposent à la flexion, les corps tendus suivant leur longueur et d'assigner leur élasticité absolue ou moment d'élasticité, en vertu duquel chaque corps résiste à son inflexion avec plus ou moins d'énergie et qui dépend tant de la nature que de l'épaisseur du corps.

Par rapport aux corps soumis à une action transversale on n'avait considéré que la résistance à la rupture et on avait négligé celle qu'ils opposent à la flexion: M. Girard, jugeant que, dans ce cas comme dans celui des corps tendus suivant leur longueur, c'est principalement la résistance à la flexion qui intéresse l'art des constructions, a ramené aussi le premier de ces cas à la théorie de l'élasticité. Son traité publié en 1798, et jusqu'à-là le plus complet, renferme des expériences nombreuses et très-précises sur la force et l'élasticité des bois de chêne et de sapin, avec l'application de la théorie aux résultats que ces expériences ont fournis.

M. Duhamel dans son *essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, a développé la théorie de la résistance à la flexion et celle de la résistance à la torsion,

(x) Voyez aussi, Académie de Berlin, 1757 et Acta Societatis, 1778.

dont Coulomb s'était déjà occupé (Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal, Académie, 1784).

Enfin M. Navier qui avait d'abord traité des notes sur la résistance des solides, dans le traité de la construction des ponts, par Gauthier et dans la science des Ingénieurs, par Bélidor, a reproduit avec tous les accroissements qu'elle avait reçus, la théorie de cette résistance, dans son ouvrage intitulé : Application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Cet ouvrage où la théorie a encore acquis un nouveau degré d'extension et a été appliquée à plusieurs appareils de charpente, contient les résultats les plus utiles des expériences faites tant en France qu'à l'étranger, sur la résistance des divers matériaux de construction.

Etablissement & discussion de tels principes — Élasticité, flexibilité & contractilité des corps solides en général.

7). Nous comprendrons dans ces préliminaires l'établissement et la discussion des principes fondamentaux de la théorie.

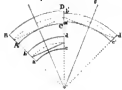
Tous les corps solides sont élastiques, mais non pas au même degré : les uns reprennent complètement leur forme naturelle, soit subitement, soit dans un temps plus ou moins long; les autres ne se rétablissent jamais qu'en partie. L'élasticité implique deux autres propriétés, la flexibilité et l'extensibilité, qui quoique souvent imperceptibles comme elle, n'en existent pas moins dans tous les corps.

Ces propriétés deviennent apparentes quand le solide a une longueur assez grande par rapport à son épaisseur.

8). Dès qu'un solide, quelle que soit la nature, a une longueur assez grande par rapport à son épaisseur, il fléchit toujours d'une quantité sensible, avant de rompre, et cette flexion entraîne non seulement une extension, à la partie convexe, mais encore une compression, à la partie concave. Par exemple, une barre de fer forgé, qui donne à peine un indice de flexibilité, sur une longueur moindre que 12 à 15 fois l'épaisseur, est très-flexible, lorsque la première dimension surpasse 40 ou 50 fois la seconde; pareillement une pièce de bois est d'autant plus flexible, que sa longueur surpasse davantage 6 à 7 fois son épaisseur; il en est de même du verre, des pierres et des métaux fondus qui, à moins que la longueur n'excède pas beaucoup l'épaisseur, prennent avant leur rupture, une flexion très-perceptible.

9). Ce fait s'explique facilement : considérons deux prismes de même matière qui, comme $ABDC$, $a'b'd'e$, ayant des bords égaux et des longueurs différentes, subissent des courbures semblables, ou qui, comme $ABDC$, $a'b'd'e$, ayant des bords

Explication de ce fait.



semblables et la même longueur, subissent des courbures égales; dans le premier cas, les flèches de courbure seront proportionnelles aux longueurs et les fibres homologues, c'est-à-dire, semblablement placées par rapport aux axes seront également allongées ou accourcies, mais les fibres extrêmes du prisme dont la longueur est moindre le seront davantage; dans le second cas, les flèches de courbure seront égales et les fibres homologues, c'est-à-dire, qui répondent à des points homologues des bases seront inégalement allongées ou accourcies; celles du prisme dont la base est plus grande le seront davantage. Il s'en suit qu'à égale hauteur le prisme le plus court, ou qu'à égale longueur, le prisme le plus gros rompra sous une moindre flèche de courbure, mais sous un plus grand effort; de sorte que dans la position longitudinale, un solide résistera, au lieu de fléchir, si sa longueur est assez petite, par rapport aux dimensions de sa base.

de la dépendance d'élasticité.

10). Un autre phénomène auquel il est essentiel de faire attention, c'est que, surtout dans certains corps, l'élasticité s'altère soit par l'augmentation de la force qui les fléchit et par conséquent de la flexion, soit par la durée de l'action de cette force; sans doute parce que les molécules intégrantes prennent peu à peu de nouvelles positions d'équilibre. L'expérience apprend que les flèches de courbure du bois, particulièrement du chêne, croissent d'abord dans le même rapport que celui des charges qui les produisent et bientôt dans un rapport de plus en plus grand. Ainsi, au-delà d'une certaine flèche de courbure, l'élasticité du bois diminue, quand la charge et par conséquent la courbure augmentent encore; de sorte qu'à l'instant de la rupture, c'est par leur force actuelle d'élasticité, égale à celle de leur cohésion, que les molécules résistent à leur séparation. On a souvent observé qu'une pièce de charpente, qui d'abord supporte sa charge sans flexion bien sensible, se courbe de plus en plus, vers son milieu, jusque-là même qu'elle finit par se rompre. Il paraît donc que non seulement l'élasticité, mais aussi la force de cohésion ou la ténacité des molécules diminuent par la durée de l'action de la charge. Les mêmes circonstances se manifestent, mais non pas au même degré, dans un barreau de fer forgé et généralement dans tous les corps solides.

Mécan. 2^e édit.

11). Le constructeur, selon la nature des corps qu'il emploie, doit donc mettre entre leur longueur et les dimensions de leur

bars, un rapport tel qu'ils ne se rompraient que sous une flexion de courbure assez petite relativement à cette longueur; il doit aussi ne les soumettre qu'à un effort tel que la courbure qu'ils prendront n'altère pas leur élasticité, et ne puisse devenir dangereuse par la suite. Ces règles s'observent effectivement dans la pratique et il en résulte, comme on va le voir, que la théorie peut comprendre le cas extrême de la résistance à la rupture, dans celui de la résistance à la simple flexion.

Des matériaux de construction et de leurs formes.

12). Les matériaux essentiels des constructions sont la pierre, le bois et le fer ou fondu ou forgé. Les principales formes sous lesquelles on les met en œuvre sont celles de prismes et de cylindres à axe rectiligne et quelquefois courbés.

Des différents genres de résistances.

13). Suivant la destination, un corps mis en œuvre doit résister soit à la compression ou à l'extension ou à la flexion ou enfin à la torsion, soit à la rupture provenant de l'une de ces actions (a).

Des forces d'élasticité et de ténacité.

14). La résistance d'un corps dépend et de sa force d'élasticité et de sa force de ténacité, qui consistent, quant à leur intensité, l'une dans l'effort capable d'accroître ou d'allonger le corps d'une très-petite quantité, l'autre dans l'effort qu'il faut faire pour l'écraser ou le comprimant ou pour le rompre ou l'allonger.

Donnée que l'expérience doit fournir à la théorie.

15). C'est à l'expérience de rechercher les valeurs de ces deux forces, relativement aux divers matériaux, valeurs dont la connaissance est nécessaire pour déterminer analytiquement soit la quantité dont un corps se comprime, s'allonge, se courbe ou se tord sous un effort donné, soit la limite des charges qu'un corps peut supporter sans se rompre. Une autre donnée non moins essentielle, pour l'application de la théorie, consiste dans la limite des efforts auxquels les solides peuvent être exposés, non pas sans qu'ils se rompent, mais sans que l'altération qu'ils éprouvent, vienne à augmenter avec le temps. Les fibres d'un solide mis en œuvre sont accrues ou allongées par l'action des forces qui les sollicitent et l'on peut prendre la proportion de cette variation de longueur, c'est-à-dire, le rapport de la variation absolue à la longueur totale pour la mesure du degré d'altération que les fibres subissent; si donc

(a) Les résistances à la rupture causées par l'extension, par la compression et par la pression transversale sont respectivement appelées dans les anciens ouvrages, résistance absolue positive, résistance absolue négative et résistance relative.

L'on sait qu'elle est dans les constructions d'une solidité bien constatée, la quantité relative d'accourcissement ou d'allongement des fibres les plus accourcies ou allongées, on pourra regarder cette quantité comme une limite qu'il est permis d'atteindre, mais qui ne peut être dépassée sans danger. En même temps, l'effort qui répond à cet accourcissement ou allongement extrême et qui le produirait directement par compression ou extension, devra être pris pour le plus grand que les fibres puissent supporter, et, en cas de constructions nouvelles, un solide sera censé près de rompre quand cet effort aura lieu. C'est ainsi qu'on substituant dans les formules relatives à la rupture une certaine partie de la ténacité au lieu de la ténacité entière, on les rendra propres au calcul des dimensions qui conviennent à un solide, selon sa destination.

Objet de la Théorie.

16). Les déterminations analytiques qui viennent d'être indiquées et qui dans leur généralité, renferment les lois mathématiques de la résistance, sont l'objet spécial de la théorie.

Hypothèses fondamentales sur la résistance 1° à la compression et à l'extension.

17). Puisque d'une part, la nature des matériaux, d'autre part, la forme et les dimensions sous lesquelles on les emploie, sont tels qu'on n'a jamais à considérer que de très-petites variations de longueur et des flexions assez peu grandes, il est permis de regarder leur élasticité comme parfaite et on en conclut de supposer, relativement à un solide pressé ou tira, suivant sa longueur, mais qui n'éprouve pas de flexion; 1°. que, sous le même poids, les fibres non seulement s'accourcissent ou s'allongent toutes également et chacune uniformément, mais aussi que les quantités d'accourcissement et d'allongement sont égales; 2°. qu'il y a constamment proportion entre les variations de longueur et les résistances respectives des fibres ou les poids qui produisent ces variations, depuis les moindres poids jusqu'à ceux qui produisent enfin la rupture.

2° à la flexion.

18). La flexion peut provenir d'un effort dirigé perpendiculairement à la longueur du solide ou parallèlement ou obliquement.

Dans le premier cas, à cause de la cohésion latérale, il existera évidemment des fibres qui conserveront leur longueur primitive et seront simplement pliées suivant une surface cylindrique, perpendiculaire au plan passant par l'axe du solide et par la direction de l'effort, tandis que les autres

fibres sont non seulement pliées, mais encore allongées ou accourcies, et, d'après l'hypothèse d'une élasticité parfaite, le sont à proportion de leurs distances à cette surface cylindrique, du côté de la convexité ou du côté de la concavité.

Dans le second cas, d'abord les fibres, à cause de la direction de l'effort, sont toutes accourcies; ensuite, par l'effet de la flexion, cet accourcissement diminuera ou même se changera en allongement dans les unes, tandis qu'il augmentera dans les autres; de sorte qu'alors, il pourra bien ne pas exister de fibres qui conservent leur longueur primitive, ou du moins ces fibres auront une autre position dans le solide. Mais afin de simplifier, nous supposons que cet accourcissement commun, qui d'ailleurs sera toujours très-peu considérable, n'influe pas sur la courbe que le solide affecte, et ce qui a été établi dans le premier cas, pour les fibres neutres ou de longueur invariable, subsistera dans le cas présent.

Il en sera de même dans le troisième cas: l'effort décomposé parallèlement à la longueur du solide, produira dans les fibres un accourcissement ou un allongement commun, qui sera modifié soit par la flexion soit par la composante perpendiculaire de l'effort, et qui sera supposé aussi n'avoir pas d'influence sur la courbe de flexion du solide.

3°. à la torsion.

19). Quant à la torsion, pareillement centée très-petite, il est naturel de supposer 1°. que, dans chaque section transversale, l'angle de torsion est le même, pour toutes les molécules, et qu'il est proportionnel à la distance entre cette section et l'extrémité fixe du solide; 2°. que de deux molécules prises sur une même fibre, à la distance l'une d'elle, celle dont l'angle de torsion est plus grand, subit à proportion de son déplacement par rapport à l'autre; déplacement qui est lui-même proportionnel et à la différence des angles de torsion des deux molécules, et à la distance de la fibre à l'axe de torsion du solide.

Elasticité et Unité spécifiques
Coefficients d'élasticité et de ténacité.

20). Ainsi donc la variation de la longueur d'un solide libre ou tiré longitudinalement, sans que la flexion ait lieu, sera proportionnelle à cette longueur, et la valeur de l'élasticité spécifique sera le quotient obtenu, en divisant le poids qui a opéré une variation absolue ou sur la longueur totale par la fraction qui exprime la variation relative ou sur l'unité de longueur, et par l'aire de la section

transversale du solide; ce qui revient au poids nécessaire pour accourcir ou allonger d'une quantité égale à sa longueur primitive, un prisme de même nature que le solide et dont la section transversale serait l'unité superficielle. De même la ténacité spécifique aura pour valeur le poids sous lequel un pareil prisme s'écarte par compression ou se rompt par extension.

Ces il est évident que les fibres d'un solide, quelles qu'elles soient leur élasticité et leur extensibilité, résistent soit à la compression ou à l'extension, soit à la rupture qui en provient, avec une force proportionnelle à leur nombre, c'est-à-dire, à l'aire de la section transversale du solide.

Nous nommerons respectivement coefficient d'élasticité et coefficient de ténacité, les valeurs de l'élasticité et de la ténacité spécifiques.

Les hypothèses que nous admettons sont les plus simples et on même temps les moins éloignées de la vérité, puisqu'elles s'accordent avec l'expérience aussi bien que le permettent le défaut d'homogénéité des matériaux et les accidents de tout genre qui troublent leur constitution physique.

Dans chaque cas de résistance, nous faisons succéder l'expérience à la théorie, afin que l'une puisse au besoin suppléer l'autre et lui fournir immédiatement les éléments nécessaires aux applications.

Exposition de la théorie.

Résistance des Solides à la pression longitudinale et à la rupture qui en provient.

De la résistance des solides à la compression et à la rupture qui en provient.

21) Le rapport entre la longueur et l'épaisseur des solides est supposé tel que la rupture s'opère sans flexion préalable.

Désignons par A le coefficient d'élasticité, lequel dépend de la nature du corps que l'on considère; par O l'aire de la section transversale; par l la longueur; par λ , la variation absolue de cette longueur et par P , le poids qui l'a produite: il est clair que $\frac{\lambda}{l}$ sera la variation sur l'unité de longueur et $\frac{P}{O}$ la résistance par unité superficielle de la section transversale. Ainsi, nous aurons (N° 20) $\frac{P}{O} = A \frac{\lambda}{l}$ d'où nous tirons

$$P = \frac{A O \lambda}{l} \dots \dots (1)$$

Quant à la résistance à la rupture, en appelant B le coefficient de ténacité, on aura simplement (N° 20).

$$P = BO \dots \dots (2)$$

Contrefois la loi exprimée par la première de ces formules ne s'appliquerait rigoureusement qu'à des variations très-petites. Or, cette loi, appliquée dans les constructions ne sont pas susceptibles de compression apparente, même sous l'effort capable de les éraiser.

Résultats des principales expériences
sur la résistance des corps à l'écrasement. — France.

22). Mais on général les notions les plus utiles sur le cas de résistance dont il s'agit, consistent dans les résultats de ces principales expériences connues et qui ne concernent guère que la résistance à l'écrasement.

Les expériences les plus remarquables sur la résistance des pierres à l'écrasement ont été faites par M. Boudet, d'abord au moyen d'un levier semblable à celui dont M. Gauthier s'était servi auparavant (*Journal de physique*, novembre, 1776) et auquel il a ensuite substitué une vis à pression, qui paraît préférable (*Art de Bâtir*, tome 3, section 2^e).

Elles lui ont fourni les indications générales suivantes: on ne peut juger certainement de la résistance des pierres, d'après leurs qualités physiques, telles que la dureté, la pesanteur spécifique, la couleur; on ne la connaît que par des expériences spéciales, mais pour des pierres de même nature, les parties les plus denses offrent plus de résistance. Il y a lieu de distinguer dans les pierres deux qualités principales, relativement à la manière dont elles cèdent à la pression: les pierres dures, dont le grain est fin, l'aggrégation homogène et compacte, se divisent avec bruit en lames ou en aiguilles verticales, avant de se réduire en poussière; les pierres tendres se divisent d'abord en pyramides, ensuite ces pyramides se partagent en petits prismes verticaux et enfin tombent aussi en poussière.

Quelques pierres, comme le granit, qui, dans les expériences, l'emportent sur d'autres par la résistance, peuvent éclater plus facilement dans une construction, si elles ne sont pas pressées bien également sur toute l'étendue du joint; ce qui tient à la faiblesse du ciment qui unit entre elles les molécules intégrantes.

Les forces capables d'éraiser des prismes de bûches semblables sont proportionnelles à ces bûches; la force diminue quand l'aire de la base demeure constante, le contour augmente; elle est la plus grande quand la base est un carré ou un cercle.

Quant au rapport de la hauteur du prisme aux dimensions de la base, il influe sur la résistance de manière qu'elle

est la plus grande pour la forme cubique et qu'elle diminue quand la forme devient plus plate ou plus haute. La résistance devient encore davantage lorsque le prisme est partagé en plusieurs parties dans sa hauteur.

Le lieu que le prisme mis en expérience, occupait dans le bloc de pierre, influe aussi sur les résultats: les parties voisines des faces supérieures et inférieures résistent moins que les parties intérieures.

Principaux résultats des expériences de M. Rondélet, faites sur des cubes de 0,55 de côté ou de 25 centimètres carrés de base (Cours 1^{er}, pages 208 et suivantes).

Indication des pierres.	Quantité spécifique	Poids moyen par mètre cube
<i>Pierres volcaniques</i>		
Basalte de Lucie	2,06	47809
Basalte d'Avignon	2,88	51965
Lave du Névez, d'alt. Bayma, près de Buzard	2,60	16302
Lave gris des environs de Rome, peu dure, d'alt. Bayma	1,97	5700
Lave tendre de Naples	1,72	4016
Truf de Rome	1,32	1467
Obside de Volcan	0,86	831
Pierre ponce	0,60	863
<i>Granités.</i>		
Granit rose des Vosges	2,35	15687
Granit gris de Bretagne	2,76	16353
Granit de Normandie, dit Salmes	2,66	17555
Granit gris des Vosges	2,64	10681
<i>Graie</i>		
Graie très-dure, roussette	2,52	20337
Graie dure	2,48	25086
Graie tendre	2,29	98
<i>Pierres anglaises</i>		
Pierre pore, ou pesante	2,66	17030
Pierre grise de Florence, dont le grain est fin	2,56	10556
<i>Pierres calcaires</i>		
Marbre noir de Flandre	2,72	19719
Marbre blanc suisse	2,70	7855
Marbre blanc statuaire	2,69	8176
Marbre blanc turquin	2,67	7695
Pierre de Caen, près de Naples, qui reçoit le poli	2,72	16865
Pierre noire de Saint-fortin, employée à Lyon, très-dure et coquilleuse	2,65	15668
Pierre de Bayeux, près de Paris, très-dure, d'un grain fin	2,44	11113
Granit de Rome, très-dure, d'un grain fin, poreux	2,56	7669
Pierre de Châtillon, près de Paris, dure, un peu coquilleuse	2,29	6367
Pierre dure de Châtillon	2,08	5859
Pierre d'Arcueil, près de Paris	2,50	6336
Pierre de Laillancourt, près de Pontivy, 1 ^{re} qualité	2,41	5336
idem 2 ^e qualité	2,29	2994
idem 3 ^e qualité	2,10	3304
Pierre fine de Caen, employée à Paris	2,07	2263
Pierre tendre ou lambeuse de Caen, 1 ^{re} qualité	1,82	1407
Pierre à Plâtre de Montmartre, près de Paris	1,96	1785
Vergée, des environs de Paris, tendre, d'un grain grossier, résistant à l'eau	1,83	1496
Lambeuse de qualité inférieure, tendre, résistant mal à l'humidité	1,56	575

Statue.

23). M. Rondelet a trouvé (tome 1.^{re} page 309) que le poids total lequel s'écrase un cube de 8 centimètres de côté est, pour le plâtre gâché à l'eau 1239 ^{kg}
 — au lait de chaux 1816.

24). La résistance du mortier varie beaucoup, selon les matières employées et les procédés de fabrication. Le tableau suivant présente les résultats des expériences de M. Rondelet.

Indication des Mortiers.	Poids par centimètre carré	Poids par centimètre carré
Mortier de Chaux et sable de rivière	1, 63	767 ^{kg}
Le même, battu	1, 89	1048
Mortier de chaux et sable de mine	1, 59	1017
le même, battu	1, 90	1406
Mortier de ciment, ou tuileaux pilés	1, 46	1191
le même, battu	1, 66	1633
Mortier en grès pilé	1, 68	733
Mortier de pouzzolane de Naples et de Rome, mêlés	1, 46	316
le même, battu	1, 68	1333
Enduit d'une conque antique des environs de Rome	1, 55	1903
Enduit en ciment des démolitions de la bastille	1, 49	1368

Les expériences ont été faites 18 mois après la fabrication des mortiers; elles ont été répétées 15 ans après et ont appris que la cohésion avait augmenté d'environ $\frac{1}{5}$, pour les mortiers de chaux et sable, et $\frac{1}{2}$, pour les mortiers de ciment et de pouzzolane (tome 1.^{re} page 305).

25). suivant les expériences de M. Rondelet, la force nécessaire pour écraser un cube en bois de chêne est de 40 à 48 ^{kg}, par ligne carrée de la base (385 à 462 ^{kg} par centimètre carré). Elle n'est pas sensiblement plus petite pour un prisme dont la hauteur n'excède pas sept à huit fois l'épaisseur et qui n'est pas susceptible de piler. Pour le bois de sapin, la résistance est de 462 à 538 ^{kg} par centimètre carré, (tome 4, page 67).

M. Gauthoy (Traité de la construction des Ponts, tome 2, page 44) a observé que l'effort supporté par une pièce de chêne, ne doit pas dépasser 160 ou 200 ^{kg} par centimètre carré, selon qu'il est dirigé perpendiculairement ou parallèlement aux fibres, si l'on veut que la surface du bois n'éprouve pas de dépression sensible.

26) D'après les expériences de M. Rondelet (tome 4, pag. 519) un cube en fer forgé de 6 à 12 ^{kg} de côté

sous une pression moyenne de 5×3^2 par ligne carrée (4965^4 par centimètre carré). Le fer cède plutôt en pliant qu'en se déprimant, quand la hauteur est triple de l'épaisseur.

Fer fondu.

27). Résultats principaux des expériences de M. P. Remie (Annales de chimie et de physique, septembre, 1848) sur l'écrasement du fer fondu.

Fer mis en expérience	Quantité spécifique	Épais- seur de la base carrée	Hauteur	Poids produisant l'écrasement
			en pouces anglais	en livres anglaises
Fer tiré du centre d'une large masse, dont les cristaux avaient la forme et l'apparence de ceux qu'on voit dans la rupture d'un canon même métal.	7,033	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1440
Fer tiré d'une petite coulée, à grain serré, d'un gris terne.	6,977	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	2116
			$\frac{3}{8}$	2363
			$\frac{1}{2}$	2005
			$\frac{5}{8}$	1407
			$\frac{3}{4}$	1743
			$\frac{7}{8}$	1594
			$\frac{1}{2}$	1639
Fer tiré de la première masse.		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9773
Cubes tirés de barres coulées horizontalement. . .	7,113	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10114
Cubes tirés de barres coulées verticalement. . .	7,074	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11137
Prisme de diverses hauteurs en fer coulé horiz ^{nt}		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9469
			$\frac{3}{4}$	9006
			$\frac{5}{8}$	8845
			$\frac{3}{4}$	8362
			$\frac{7}{8}$	6430
			$\frac{1}{2}$	6331
Idem, en fer coulé verticalement.		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	9328
			$\frac{5}{8}$	8385
			$\frac{3}{4}$	7896
			$\frac{7}{8}$	7018
			$\frac{1}{2}$	6430

autres métaux.

38). Suivant les mêmes expériences, l'effort nécessaire pour élever un cube en cuivre coulé de . . . $\frac{1}{4}$ p. ang. de côté est . . . 7318 lbs au poids.

pour comprimer un cube pareil,

en cuivre jaune de $\frac{1}{10}$	3213
de $\frac{1}{2}$	10304
en cuivre battu, de $\frac{1}{16}$	3427
de $\frac{1}{8}$	6460
en étain coulé, de $\frac{1}{16}$	552
de $\frac{1}{8}$	966
en plomb coulé, de $\frac{1}{4}$	483

Ces nombres et ceux de la dernière colonne du tableau précédent, lorsque le côté de la base est $\frac{1}{4}$ pouce anglais, doivent être multipliés par 1,125 pour donner en kilogrammes la résistance sur un centimètre carré.

Résistance Des solides à l'Extension et à la rupture qui en provient.

De la résistance des Solides à l'extension et à la rupture qui en provient.

29). La formule (1) relative à de petites variations de longueur conforme aussi la relation entre l'allongement des solides et l'effort qui le produit ou la résistance qui y répond; par conséquent, la formule (2) détermine, en général, la résistance à la rupture provenant de l'extension; mais c'est encore par le moyen de l'expérience qu'il convient d'étudier le cas de résistance, dont il s'agit.

Il n'existe presque aucune expérience directe sur l'allongement des corps en vertu d'un effort donné; cet allongement, comme on le verra dans la suite, peut être conclu des expériences sur la flexion.

Quant à la résistance à la rupture causée par l'extension, elle a été l'objet d'expériences dont nous rapporterons ici les plus utiles.

Résultats des principales expériences sur la résistance des solides à la rupture causée par l'extension.

Pierre.

30). Suivant Coulomb (Mémoire cité), la force nécessaire pour provoquer la rupture sur une surface d'un pouce carré, a été pour une pierre blanche, d'un grain fin et homogène, de 215^{lbs} (16^{lbs} par centimètre carré); pour la brique de province, bien cuite et d'un grain très-un, de 280 à 300^{lbs} (18^{lbs} 7 à 20 par centimètre carré).

Plâtre.

31). M^r Bravais (Cours 1^{re} page 315) a trouvé que la force de cohésion du plâtre est de 60^{lbs} par pouce carré (4^{lbs} par centimètre carré). La force avec laquelle il adhère aux pierres et aux briques est environ les $\frac{2}{3}$ de sa propre cohésion. Cette force est plus grande pour la pierre meulière et la brique que pour les pierres.

calcaire. Elle diminue beaucoup avec le temps.

Mortier.

32). D'après le même auteur, la force de cohésion du mortier est environ $\frac{1}{5}$ de la résistance à l'écrasement; elle est moindre que la force avec laquelle il adhère aux pierres et aux briques.

M^r Vaut (Recherches expérimentales sur les chaux, page 96) trouve la force de cohésion sur un centimètre carré, pour les mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux uniquement hydraulique de 9⁴⁹ 6

Mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux hydraulique ordinaire 6, 0

Mortiers bien faits, à sable quartzeux et chaux communes ou grasse 3, 6

Mortiers mal faits, communément, au plus 1, 5

Bois.

33). D'après les expériences de M^r Brondelet (tome 4, page 65) la force de cohésion du bois de Chêne, tiré dans le sens des fibres, est de 102⁴ par ligne carrée (981⁴ par centimètre carré).

Des expériences rapportées par M^r Navier, (ouvrage cité, page 16 et qui ont été faites sur des pièces d'environ $\frac{1}{2}$ de pouce de diamètre, ont donné ces résultats moyens, ramenés, par le calcul à exprimer la force nécessaire pour opérer la rupture sur un pouce carré anglais;

Savoir: Sapin, 1^o 12857 livres au du poids

2^o 11549

Frêne, 1^o 17207

2^o 16947

Hêtre 11467

Chêne 1^o 9198

2^o 11580

Buis 19891

Poirier 9822

Selon les mêmes expériences, l'adhésion latérale des fibres dans le sapin, c'est-à-dire, l'effort nécessaire pour séparer deux parties d'une pièce, on les faisant glisser l'une sur l'autre parallèlement aux fibres, est de 532 livres au du poids, par pouce carré anglais.

D'autres expériences rapportées dans le même ouvrage, page 16, apprennent que la force de cohésion des bois tirés perpendiculairement à la direction des fibres, est, sur un pouce carré anglais, pour le Chêne 2316 livres au du poids

L'aulxier 1782

Larix de 270 à 1700

On trouvera en Kilogrammes, la résistance sur un centimètre

For forgé.

carre, on multipliant les nombres précédents, par 0,07029.

34). Résultats des expériences de M. Perconet (voyez traité de la construction des Ponts par Gauthey, tome 2, page 164).

1°. Sur des verges de fer carré, tirées dans le sens de la longueur.

Longueur des Fers	Épaisseur	Poids produisant la rupture	Poids supporté par millimètre carré.
0,650	12,97	5978 ⁴	35,5
0,325		6687	39,8
0,162		5502	32,7
0,081		5972	35,5
0,650		3983	36,7
0,325	9,02	3113	38,3
0,650		6,77	2134
0,325		2369	81,7
0,162		2672	53,9
0,081		2487	56,3
0,650		2159	47,7
Poids moyen par millim. carré. .			42,9

2°. Sur des verges de fer rond, tirées dans le sens de la longueur.

Longueur des Fers	Épaisseur	Poids produisant la rupture	Poids supporté par millimètre carré.
0,650	10,15	3020 ⁴	37,5
0,325		3074	38,0
0,162		3348	41,4
0,081		3368	41,6
0,650		7,88	2717
0,162	7,88	2748	56,3
0,081		2683	55,0
0,650		7,62	1463
0,325		1662	36,4
0,162		1721	37,7
0,081		1510	33,1
Poids moyen par millimètre carré			42,2

M. Rondelet (tome 2, page 500) a fait avec M. Soufflot, sur des verges de fer, tirées dans le sens de leur longueur qui supportaient un pou 2^e, des expériences dont les résultats sont indiqués dans le Tableau ci-après.

Indication des Fers.	Longueur des Fers.	Epaisseur des Fers.	Poids par mètre linéaire.	Poids supporté par une carrée.
Fer tout neuf	2 $\frac{3}{4}$	2 $\frac{1}{4}$	5542	590
Idem	2 $\frac{2}{3}$	2 .	3374	638
Fer dont la cassure offre un peu de grain	6 .	2 $\frac{3}{4}$	6157	410
Fer dont la cassure offre les $\frac{2}{3}$ de neuf	5 .	2 $\frac{1}{2}$	4874	390
Fer moitié neuf	5 $\frac{1}{2}$	3 .	5524	335
Fer tout neuf	6 .	3 .	15600	856
Fer offrant un tiers de grain	6 .	3 .	7800	433
Fer offrant plus de moitié en grain	6 .	3 .	5857	325
Fer offrant un peu de grain	3 .	2 .	3635	606
Fer tout neuf, de 3 lig. de diamètre	6600	933
Fer à gros grain, sans neuf	4 .	4 .	2991	187
Fer à grain moyen, sans neuf	4 .	4 .	3980	249
Fer à grain fin, sans neuf	4 .	4 .	5840	365
Fer d'un grain moyen, moitié neuf	4 .	4 .	7200	450
Fer tout neuf	4 .	4 .	10320	645
Fer à gros grain, moitié neuf	4 .	4 .	5840	365
Fer de cohésion moyenne sur une ligne carrée	486

Cinsi, la résistance moyenne est de 46⁴⁸ par millimètre carré.
 Résultats des expériences faites par M^r Séguin, aîné, au moyen d'un levier, sur des pièces de fer forgé, tirées dans le sens de la longueur (Des ponts en fil de fer, 2^e édition, page 48 & 400).

Indication des Fils.	Longueur des Fils.	Epaisseur des Fils.	Poids par mètre linéaire.	Poids supporté par millimètre carré.
Fer de Saint-Chamond, fait au laminoir	16,0	8,0	5644	23,8
Idem	10,0	8,0	4133	51,7
Idem, ayant 0,01 de diamètre	3743	48,0
Fer de Bourgogne	13,0	13,0	5226	30,4
Idem, chauffé au rouge nuant et refroidi lentement	13,5	13,5	5435	29,7
Idem, coupé au milieu, tendu bout à bout, sans dévier	13,3	13,3	5280	29,7
Idem, coupé au milieu, tendu enifflet, et tiré	10,15	10,15	5688	55,2
Idem, plus étiré que la précédente, sans tendure	4,5	4,5	1238	61,0
Fer dit ruban, tel-donc	20,3	1,7	1541	44,7

31 de fer.

35). Buffon (Œuvres, partie expérimentale, 4^e Mémoire) a rompu deux fils de fer dont le diamètre était de 2,26 millimètres, par une traction de 236 et 141⁴⁸ ce qui revient à 60⁴⁸ par millimètre carré.

M.^r Séguin, aîné, a fait des expériences sur la résistance du fil de fer, tiré suivant la longueur et dont il a calculé les diamètres d'après le poids d'une portion de fil d'un mètre de longueur, en supposant que le mètre cube pèse 7780 (Des ponts en fil de fer, pages 83 et 100). Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant.

Indication des Fils .	Diamètres	Poids produisant la rupture	Poids supporté par millimètre carré.
	millimètres	Kilogrammes	Kilogrammes
Fil de fer de Bourgogne, N ^o 8, recuit inégalement	1,172	41,3	38,2
idem N ^o 7, recuit exactement	1,062	31,4	36,1
idem N ^o 18, non recuit	3,366	505,6	56,8
idem N ^o 7, non recuit	1,062	65,5	73,7
Fil de l'aigle, employé pour la Carderie	0,2296	3,72	89,8
Patte-groble, assez doux	0,5317	23,6	85,7
Fil provenant d'une manufacture de Belancan, N ^o 1, doux	0,6188	25,96	86,1
N ^o 2, doux	0,7078	35,35	87,0
3, cassant	0,7327	34,12	80,8
4, cassant	0,838	42,3	76,6
5, très-cassant	0,9115	47,25	72,3
6,	1,022	62,56	76,1
7,	1,08	65,25	71,2
8, très-cassant	1,123	66,75	67,3
9, assez cassant	1,293	91,74	69,8
10, très-doux	1,435	105,00	64,8
11, très-doux	1,476	100,25	58,6
12,	1,691	124,8	55,5
13,	1,8	145,5	57,2
14, très-doux, sans rebout	2,072	166,5	49,3
15,	2,226	202,0	51,9
16, très-doux	2,489	311,0	63,9
17, pailloux	2,695	359,0	68,1
18,	3,087	617,0	84,0
19,	3,492	750,0	78,2
20,	4,14	874,75	65,7
21,	4,812	1138,0	62,5
22, très-cassant	5,449	1579,0	67,7
23, doux	5,942	1738,5	62,6

En fer.

36). Résultats des expériences du C.^e Brown, sur des barreaux carrés (Rapport et Mémoires sur les ponts suspendus).

Epaississement des pièces	Poids produisant la rupture
pour angl. $1 \frac{3}{4}$	total 11, 7
	11, 5
	16,
	16,
1	11, 10

Le résultat moyen revient à $16 \frac{1}{2}$
pour un millimètre carré.

D'après les expériences faites par M.^e P. Penney (Annales de chimie et de physique, septembre, 1818), sur des pièces carrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, la force de cohésion est, pour le fer fondu horizontalement. 1166 *liv. au. du poids*
verticalement. 1215

Divers Métaux.

37). D'après les mêmes expériences, toujours sur des pièces carrées de $\frac{1}{4}$ pouce anglais de côté, la force de cohésion est, pour le
Métal de canon, dur. 2273 *liv. au. du poids*
Cuivre battu. 2212
Cuivre fondu. 1192
Cuivre jaune fin. 1123
Étain fondu. 296
Plomb fondu. 114

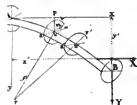
Cordages.

38). Suivant Duchamel (traité de l'art de la corderie), si l'on se contente le diamètre d'une corde, elle porte moyennement 400 d.² kilogrammes

Suivant Coulomb (Tome 10 des Savants étrangers, page 245) les cordes blanches portent jusqu'à 50 à 60 ^{liv.} par fil de carret; mais on ne doit jamais les charger de plus de 40. Les cordes goudronnées ne portent que les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ des cordes blanches.

Résistance des Solides à la flexion et à la rupture qui en provient.

Conditions générales de l'équilibre de résistance.



39). Considérons un solide cylindrique quelconque AB, fléchi par des forces ou tantes situées primitivement ou susceptibles d'être ramenés dans un même plan XAY, parallèle à la longueur du solide et tellement disposé que la flexion se soit opérée parallèlement à ce plan, auquel par conséquent la surface cylindrique ABC des fibres neutres n'aura pas été d'être perpendiculaire.

Ces forces que je nommerai *externes* seront en général de deux sortes; les uns *passives*, dues à des points qui atterrirent le solide ou sur lesquels il s'appuie; les autres *actives*, telles que des poids dont il est chargé ou des pressions qu'il supporte.

D'abord, l'équilibre absolu ou de situation exigera que toutes ces forces se réduisent à deux, égales et directement opposées. En effet si l'on conçoit deux plans infiniment voisins auv , $au'v'$, normaux à la courbe de flexion $Au u'B$ du solide et qui en déterminant une tranche élémentaire quelconque; l'équilibre absolu permettra de regarder l'une des parties extrêmes, savoir, $Aauv$, comme parfaitement fixe, et l'autre, $Bauv$, comme un système particulier, de forme invariable, uniquement sollicité à tourner dans le sens AB autour de l'intersection u du plan xAy , du plan normal auv et de la surface cylindrique ABC ; puisque le plan xAy , pour être supposé comme on l'a dit, doit évidemment comprendre aussi la résultante des forces internes, c'est-à-dire, des forces de traction et de pression des éléments de fibres dont la tranche est composée. Ainsi l'équilibre relatif ou de résistance exigera seulement que la résultante de toutes les forces auxquelles le système particulier se trouve soumis, soit dans le plan xAy et passe par le centre de rotation u , et par conséquent, que la somme des moments de ces forces, relativement à chacun des axes au et uv , soit égale à zéro.

C'est de cette manière qu'un corps résiste soit à la flexion, soit à la rupture qui en provient et que l'équilibre s'établit entre la résistance et les forces opposées.

Les conditions de cet équilibre sont indépendantes de la loi de la résistance des fibres à l'étension et à la compression, mais on ne pourrait les exprimer analytiquement sans connaître cette loi; il faut donc recourir aux hypothèses posées précédemment (N^{os} 17 et 18).

Equation générale de cet équilibre.

40) Nous rapporterons la courbe de flexion, c'est-à-dire, la courbe $Au u'B$, suivant laquelle la surface cylindrique ABC des fibres neutres est courbée par le plan xAy , à deux axes pris dans ce plan, qui auront leur origine en un point quelconque A de la courbe, et qui supposés l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe du solide considéré dans son état naturel, seront respectivement les axes des x et des y .

Les points de la section normale auv du solide seront rapportés à l'axe au et à un autre axe mené dans cette section par l'origine a , perpendiculairement à au ou parallèlement

à uv , intersection des plans xAy et auv . Le premier de ces axes sera celui des abscisses u , le second sera celui des ordonnées v .

Cela posé, désignons par A et B , comme précédemment, les coefficients d'élasticité et de ténacité (N^o 20);
par ρ le rayon de courbure uv de la courbe de flexion, au point u par lequel est mené le plan normal auv ;
 x et y les coordonnées de ce point;
 s l'arc Au de la courbe de flexion;
 X, Y les résultantes des forces externes, appliquées à la partie $Ba'u'v'$ du solide et décomposées parallèlement aux x et aux y (on suppose que les forces X, Y tendent à allonger les coordonnées auxquelles elles sont parallèles et on les regarde comme positives);
 y', x' les distances de ces résultantes aux axes des x et des y ;
 U, U' les fonctions de u qui expriment l'ordonnée du contour de la section normale auv , du côté de l'axe au , où les fibres sont allongées et du côté où elles sont raccourcies;
 a la dimension du solide suivant l'axe au ;
 v la plus grande valeur de U ou de U' , c'est-à-dire, la distance à l'axe au , de la fibre la plus allongée ou la plus raccourcie, lorsque le solide est prêt de se rompre.

Un élément quelconque de fibre, pris dans la tranche, et dont la base est l'élément rectangulaire $mm' = dv du$ de la section normale auv , avait primitivement la longueur $uu' = ds$, puisque (N^o 18) on fait abstraction de l'allongement ou raccourcissement commun: mais cette longueur ayant variée de la quantité $\frac{v ds}{\rho}$, la résistance de l'élément, d'après la formule du (N^o 21) s'exprimera par

$$\frac{A}{3} v dv du \dots \dots \dots (1)$$

et son moment relatif à l'axe au , par

$$\frac{A}{3} v^2 dv du \dots \dots \dots (2)$$

donc, parce que $\int_0^a v^2 dv = \frac{1}{3} U^3$, $\int_0^a v^2 dv = \frac{1}{3} U'^3$, la somme des moments, par rapport à l'axe au , des résistances dues aux extensions et contractions des éléments de fibres, dont la tranche est formée, sera

$$\frac{A}{3} \left(\int_0^a U^3 du + \int_0^a U'^3 du \right) \dots \dots \dots (3)$$

puisque ces forces tendent à faire tourner dans le même sens autour de cet axe

Ainsi l'équation des moments par rapport à cet axe, sera

$$\frac{A}{3} \left(\int_0^a U^3 du + \int_0^a U'^3 du \right) = (x' - x) Y - (y' - y) X \dots \dots \dots (4)$$

De l'axe et du moment d'inertie. 41) Le premier membre de cette équation ou l'expression (3),



lorsqu'on y fait $\xi = 1$, a pour chaque corps individuel une valeur particulière qui dépend non seulement de la nature de ce corps, de la figure et des dimensions de sa section transversale auv , mais encore de la position de l'axe au dans cette section. Or, comme la résistance d'un solide à la flexion est, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnelle à cette valeur de l'expression (3), il est clair, selon le principe de Coulomb, que parmi tous les axes menés dans la section auv , perpendiculairement au plan xAy , c'est autour de celui pour lequel la valeur dont il s'agit est un minimum, que la flexion doit naturellement s'opérer. Mais si l'on observe que l'expression (3) dégagée du facteur $\frac{1}{2}g$, n'est autre chose que l'élément superficiel $dv du$, multiplié par le carré v^2 de sa distance à l'axe au , on verra que l'expression (3), dégagée du même facteur, n'est autre chose, non plus, que le moment d'inertie de la section auv , pris par rapport à l'axe au , abstraction faite toutefois de la densité supposée uniforme.

Ainsi, l'axe autour duquel la flexion s'opère naturellement dans chaque section, et qui, à cause de la disposition attribuée au plan xAy , est déjà l'un de ceux qui sont perpendiculaires à ce plan, doit, par la propriété connue des moments d'inertie, être de tous ces axes parallèles, celui qui passe par le centre de gravité de la section.

Tout appellerons axe d'élasticité, celui autour duquel la flexion s'effectue, et moment d'élasticité, la valeur correspondante, toujours pour $\xi = 1$, de l'expression (3), valeur qu'on nomme aussi quelquefois élasticité absolue et que, pour abréger, nous représenterons par δ .

Conditions relatives à la disposition du plan des forces qui fléchissent le solide.

42). D'ailleurs, pour qu'il n'y ait pas tendance à la flexion, autour de l'axe uv , ou que la résultante générale des forces internes, lesquelles sont parallèles entre elles et au plan xAy , soit effectivement comprise dans ce plan, il faudra, comme nous l'avons dit, que la somme des moments de ces forces par rapport au plan xAy ou à l'axe uv soit égale à zéro. Désignant donc par M, M' les moments, l'un positif l'autre négatif, des forces de traction, placées de part et d'autre de l'axe uv , et de même par m, m' ceux des forces de pression, on aura

$$M + m' = M' + m \dots \dots \dots (5)$$

Equation à laquelle doit satisfaire la position de l'axe d'élasticité.

43). Enfin, par la nature du centre de gravité, la position de l'axe au d'élasticité, dans la section auv , devra satisfaire,

en général, à l'équation

$$\int v \, d m = 0 \dots \dots \dots (a)$$

Equations auxquelles doit satisfaire la disposition du plan des forces.

44). Et comme les moments M, M' ; m, m' ne sont autre chose que l'expression (1) multipliée par u et intégrée ou que l'intégrale $\int u v \, d m$, restreinte à chacune des quatre parties dans lesquelles les axes au et uv divisent la section auv , l'équation (5) revient à

$$\int u v \, d m = 0 \dots \dots \dots (b)$$

La coexistence des équations (a) et (b) signifie que la ligne au est l'un des deux axes principaux, répondant au centre de gravité, mais que la ligne uv est seulement parallèle à l'autre. Car soit $u' = u + \omega$, il viendra $\int u' v \, d m = \int u v \, d m + \omega \int v \, d m$, quantité nulle, en vertu de (a) et de (b).

Or, si P, T sont les résultantes particulières des forces de pression et de traction et p, t les distances de ces résultantes au plan xAy , l'équation (b) reviendra à $Pp - Tt = 0$; il faudra donc que quel que soit ω , cette équation subsiste, quand on y remplacera p et t par $p + \omega$ et $t + \omega$; d'où résulte $P = T, p = t$; c'est-à-dire, que les forces P et T forment un couple parallèle au plan xAy .

La Mécanique rationnelle laisse la distance p ou t indéterminée; mais on réfléchissant à la constitution physique des corps, on aperçoit qu'une force qui produit sur des éléments de fibres, des extensions ou des contractions ordonnées comme on le suppose, c'est-à-dire, les mêmes à égales distances de l'axe au et proportionnelles à ces distances, ne peut être que directement opposée à la résultante particulière des forces correspondantes de traction ou de pression; d'où il suit que l'une et l'autre résultante particulière sont comprises elles-mêmes dans le plan xAy , ou qu'on a encore

$$M = M', \quad m = m' \dots \dots \dots (6)$$

Savoir, en plaçant l'origine en u et désignant par $a, -a$ les deux parties de la dimension a ,

$$\int_{-a}^a u^2 \, d u = 0, \quad \int_{-a}^a u^3 \, d u = 0 \dots \dots (c)$$

équations qui comportent la précédente (b), laquelle par conséquent les rend compatibles l'une avec l'autre.

Expression du moment d'inertie, équation abrégée de l'équilibre ou résistance à la flexion.

45) Or, plus, à cause de

$$A = \frac{1}{3} \left(\int_0^a u^3 \, d u + \int_0^a u^3 \, d u \right) \dots \dots \dots (A)$$

l'équation (6) deviendra simplement

$$\frac{1}{3} = (x' - x) Y - (y' - y) X \dots \dots \dots (B)$$

l'expression du moment d'élasticité;
équation particulière de l'équilibre
de résistance à la rupture

Cette équation qui exprime les conditions de l'équilibre de résistance à la flexion est celle de la courbe connue sous le nom d'élastique (*).

46). Si le corps était sur le point de se rompre, la résistance de l'élément de fibre, le plus allongé ou le plus accourci et qui est à la distance v de l'axe d'élasticité, serait $Bvdvdu$; ainsi la résistance de l'élément placé à la distance v sera $\frac{B}{3}vdvdu$ et son moment $\frac{B}{3}v^3dvdu$; car le premier élément résiste par sa cohésion, à laquelle est égale sa force actuelle d'élasticité; le second résiste par sa force d'élasticité et les deux forces d'élasticité sont comme les distances à l'axe ou . D'après cela, la quantité (A) prend une autre valeur qu'on appelle moment de rupture; désignons cette valeur par β , nous aurons

$$\beta = \frac{B}{3V} \left(\int_0^x v^3 du + \int_0^x v^3 du \right) \dots \dots \dots (A')$$

Par l'introduction du moment de rupture, l'équation (4) devient

$$\beta = (x'-x)Y - (y'-y)X \dots \dots \dots (B)$$

et exprime alors les conditions de l'équilibre de résistance à la rupture causée par la flexion; pourvu qu'on entende par x, y les coordonnées du point où la rupture doit s'effectuer, c'est-à-dire, qui font acquiescer au second membre, la plus grande valeur dans toute la partie du solide, à laquelle l'équation s'applique.

Relation entre les expressions
des deux moments.

47). En comparant l'expression du moment de rupture β , avec celle du moment d'élasticité A , on reconnaît que l'une se déduit de l'autre par la substitution de $\frac{B}{3}$ à la place de A .

Les constantes A et B se déterminent par le calcul et l'expérience comme nous l'expliquerons dans la suite.

Distinction de trois cas dans la
question générale de l'équilibre

48). Nous avons déjà remarqué (N^o 18) que la question générale présente trois cas particuliers, selon que les forces actives qui tiennent le corps fléchi sont dirigées perpendiculairement à la longueur de ce corps ou parallèlement ou obliquement.

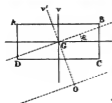
Des moments d'élasticité et de rupture des principales sections transversales.

Détermination des moments
d'élasticité et de rupture des prin-
cipales sections transversales.

49). Mais avant de développer chacun de ces cas, nous déterminerons les moments d'élasticité et de rupture des différentes figures que l'on a coutume de donner à la section transversale des solides, ou qui offriraient le plus d'avantage dans les constructions.

(*) L'application du principe du Centre, fait voir, à ce sujet, que l'équilibre est réellement un équilibre de la nature des axes x et y , et que l'équation (4) doit être remplacée par la première dérivée de ces axes, mais à la manière de la première. Si on rétablit l'équilibre des axes et moments d'élasticité, relatifs aux figures planes, avec ceux d'élasticité, qui acquiescent ainsi toutes les propriétés des premiers.

1°. Propriétés: cas particuliers.



50). Qu'il s'agisse d'abord de déterminer les moments d'un rectangle ABCD: il est clair que des deux perpendiculaires G_u, G_v , menées aux côtés par le centre de gravité G , l'une sera l'axe d'inertie et l'autre la trace du plan des forces. Désignons par a et b les côtés AB et BC l'équation de AB sera $U = \frac{1}{2}b$ et il viendra $\frac{1}{3} \int U^3 du = D = \frac{1}{12} ab^3$; d'où

$$I = \frac{1}{12} A a b^3 \dots (1) \quad \beta = \frac{1}{12} B a b^3 \dots (2)$$

Ces formules prouvent qu'un prisme rectangulaire, fléchi parallèlement à une face, résiste à la flexion proportionnellement à sa largeur et au cube de sa hauteur, tandis que la résistance à la rupture est proportionnelle à la largeur et au carré de sa hauteur.

Relation entre les moments relatifs à deux axes parallèles dont l'un passe par le centre de gravité.

51). Le moment par rapport à l'axe G_v serait évidemment $C = \frac{1}{12} a^3 b$; or, les formules par lesquelles on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre de même origine, donnent $v' = v \cos \epsilon - u \sin \epsilon$; substituant pour v cette valeur, on a ...

$$\int v'^3 dm = Z = C \sin^3 \epsilon + D \cos^3 \epsilon$$
, c'est-à-dire,

$$Z = \frac{1}{12} a b (a^3 \sin^3 \epsilon + b^3 \cos^3 \epsilon) \dots (3)$$

Mais, par la théorie des moments d'inertie, le moment Z' relatif à un axe parallèle à G_u et placé à la distance $GO = q$, sera

$$Z' = Z + a b q^2 \dots (4)$$

2°. Cas: propriétés des moments.

52). Pour le carré on a $b = a$: les formules (1) et (2) deviennent

$$I = \frac{1}{12} A a^4 \dots (5) \quad \beta = \frac{1}{12} B a^4 \dots (6)$$

et la formule (3) fait voir que le moment d'inertie de cette figure est indépendant de la direction de l'axe G_u .

Il n'en est pas de même du moment de rupture; la valeur générale, qui, à cause de $V = \frac{1}{2} a (\sin \epsilon + \cos \epsilon)$, est $\frac{1}{6} B \frac{a^3}{\sin \epsilon + \cos \epsilon}$, se réduit, quand $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, à

$$\beta = \frac{1}{6\sqrt{2}} B a^3 \dots (7)$$

Les moments de rupture du carré relativement à la diagonale et à l'axe parallèle à un côté sont donc dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, c'est-à-dire, dans le rapport inverse de ces lignes.

3°. Cercle; comparaison avec le rectangle circonscrit.



53). Cherchons-nous maintenant de trouver les moments d'un cercle par rapport à son diamètre. Soient r le rayon et θ l'axe variable, mesuré sur la circonférence dont le rayon est l'unité; nous aurons $U = r \sin \theta$ et $r - u = r \cos \theta$; d'où $du = r \sin \theta d\theta$; d'après cela, $\frac{1}{3} \int_0^\pi U^3 du = \frac{1}{3} r^4 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{1}{3} r^4 \int_0^\pi (\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta + \frac{1}{2}) d\theta = \frac{1}{8} \pi r^4$ (Lacroix, 76° 210); donc

$$A = \frac{1}{2} A \pi r^2 \dots (8) \quad B = \frac{1}{2} B \pi r^2 \dots (9)$$

On voit que les moments d'élasticité et ceux de rupture du cercle et du carré circonscrit sont dans le rapport de $\frac{3\pi}{16}$ à 1.

Angle inscrit sous la circonférence
est un maximum.



Des couronnes rectangulaires ou
circulaires et du double T.



Des la demi-couronne rectangulaire
et du T simple.



Des figures dont le moment d'élasticité
est indépendant de la direction
de l'axe.



54). Au moyen de la relation $A^2 + B^2 = 4r^2$, on trouve aisément que de tous les rectangles inscrits, celui qui offre la plus de résistance à la rupture ou à la flexion, est déterminé par la condition $B^2 = 1A^2$ ou $B^2 = 3A^2$. Pour le construire, il suffit de diviser le diamètre en 3 ou 4 parties égales; les extrémités de ce diamètre et de l'ordonnée répondant au premier ou au dernier point de division déterminent les deux côtés du rectangle.

55). Les moments d'une couronne rectangulaire ou d'un double T et d'une couronne circulaire se concluent de ceux du rectangle et du cercle, et la comparaison des uns avec les autres fait connaître le rapport des résistances à égalité de surface, ou le rapport des surfaces à égalité de résistances.

Paire d'une section rectangulaire demeurant la même, la résistance à la rupture croît en raison de la hauteur; mais en augmentant cette dimension, on ne peut diminuer l'autre que jusqu'à une certaine limite au-delà de laquelle le solide manquerait de stabilité et ne présenterait pas assez de résistance dans le sens horizontal. Les trois formes précédentes, surtout les deux premières, sont préférables à celle du rectangle plein, malgré la difficulté d'éviter les imperfections dans la fabrication des tuyaux en fer fondus.

56). Dans la demi-couronne rectangulaire et le T simple, l'axe d'élasticité est évidemment la parallèle à AB, menée par le centre de gravité. On donne l'une ou l'autre figure, et plus fréquemment la seconde, à la section transversale des pièces inclinées, soumises à une pression longitudinale qui, comme dans les piles-boulants, doit s'exercer près d'une face.

57). Lorsqu'un solide, tel que les arbres horizontaux, dans les machines de rotation, doit présenter successivement ses différentes faces à un effort dirigé perpendiculairement à sa longueur, il convient que la section transversale soit capable, dans tous les sens, de la même résistance à la flexion. Un cercle plein et une couronne circulaire ont évidemment cette propriété; une figure carrée et par conséquent une couronne de cette figure en jouissent également.

Il en est de même de la figure composée d'un carré et de quatre rectangles, construits symétriquement sur les côtés. On connaît le moment du carré ABCD; on obtiendra celui des

deux rectangles opposés $abcd, a'b'c'd'$, on observant qu'il est égal à la différence des moments des rectangles $a'b'c'd, ba'd'e$, moments que l'on connaît aussi.

Passons maintenant à la discussion des trois principaux cas de résistance, que nous avons distingués.

De la résistance des solides à la flexion et à la rupture produites par un effort perpendiculaire à la longueur.

Premier cas de la résistance à la flexion et à la rupture qui se produit.



Solide soutenu horizontalement par une des extrémités et chargé à l'autre d'un poids quelconque.

§8). Lorsque la résultante des forces actives est dirigée perpendiculairement à l'axe du solide, la composante X est nulle et les équations générales (B), (B') se réduisent à

$$\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} = Y(x-x) \dots \dots (b), \quad \beta = Y(x-x) \dots \dots (c)$$

on prenant dans cette dernière le maximum du moment. -- $Y(x-x)$.

§9). Considérons un solide soutenu horizontalement à une extrémité A et chargé d'un poids P, à l'autre extrémité M. Désignons par c la distance horizontale AB des deux extrémités; par f l'ordonnée extrême BM; par s la longueur de la courbe AM du solide; par ω l'angle que fait avec l'horizon la tangente à l'extrémité M. Puisque, par hypothèse, la flexion demeure toujours très-petite, même jusqu'au degré qui répond à la rupture, il est permis de négliger le carré de $\frac{dy}{dx}$; on conséquence, l'équation (b) devient $\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} = P(c-x)$; d'où l'on tire

$$\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} = P(c-x - \frac{1}{2}x^2), \quad \alpha y = P(\frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{6}x^3)$$

et

$$f = P \frac{c^3}{3\alpha}, \quad \tan \omega = \frac{3f}{2c}, \quad s = c + \frac{3f^2}{6c} \dots \dots (1)$$

on ne retenant que les deux premiers termes du développement du radical $\alpha x \sqrt{1 + \frac{d^2 y^2}{dx^2}} = ds$.

Donc la flèche est proportionnelle au poids P et au cube de la distance c . Mais parce que la rupture tend à se faire suivant la section A, pour laquelle $x=0$, et $P(c-x) = \text{maximum}$, l'équation (c) donne

$$P = \frac{\beta}{c} \dots \dots \dots (2)$$

ou, en admettant que l'équation de la courbe du solide à l'instant de la rupture est encore $\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} = P(c-x)$,

$$P = \frac{\beta}{s - \frac{3f^2}{6c}} \dots \dots \dots (3)$$

Le poids est supposé réparti uniformément sur la longueur du solide.

60) Supposons le solide chargé de manière que des poids égaux répondent à des parties égales de l'axe Ax , ou ce qui revient au même, de l'axe AM , pourvu que la flexion soit comme nulle. Les coordonnées du point m par lequel passe le plan normal étant toujours x et y , soient u l'abscisse d'un point quelconque, pris entre m et M et p le poids qui répond à l'unité de longueur de l'axe Ax ; il est clair que $p \, du$ sera le poids supporté par l'élément dont la projection sur cet axe est du , et $p(u-x) \, du$ le moment de ce poids par rapport au point m . On aura donc $\Delta \frac{dy}{dx} = \int_0^c p(u-x) \, du = p(\frac{1}{2}c^2 - cx + \frac{1}{2}x^2)$, intégrale qui se réduit à $cp \cdot \frac{1}{2}c$, quand $x=0$, ou que le point m coïncide avec le point A . Ainsi il viendra d'abord $\Delta \frac{dy}{dx} = p(\frac{1}{2}c^2 - cx + \frac{1}{2}x^2)$, $\Delta y = p(\frac{1}{6}c^3 - \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{6}x^3)$ et

$$f = cp \frac{c^3}{24}, \quad \text{tang } \omega = \frac{4f}{3c} \dots \dots \dots (4)$$

puis

$\beta = cp \cdot \frac{1}{2}c$, $cp = \frac{2\beta}{c} \dots \dots \dots (5)$
 expressions dans lesquelles cp est le poids total réparti sur la longueur du solide.

Il suit de la comparaison des valeurs (1) et (4) de f , que si le poids total cp était appliqué en M , l'abaissement f serait plus grand dans le rapport de 8 à 3; et de la comparaison des valeurs (2) et (5) de P et de cp , que le solide serait également rompu par un poids distribué uniformément sur sa longueur, et par un poids moitié moindre; suspendus à l'extrémité M .

Manière d'arriver à l'équation du poids du solide.

61). Si le solide étant chargé d'un poids P à l'extrémité M , on veut tenir compte de son propre poids $\Pi = cp$, il suffira d'observer que les valeurs actuelles de $\Delta \frac{dy}{dx}$ et par conséquent de f , tang ω et β , sont respectivement les sommes des valeurs (1), (4) et (2), (5) relatives aux charges séparées P et cp ou Π , pourvu que f soit éliminé de valeurs de tang ω ; de sorte qu'on a

$$f = \frac{c^3}{24} \left(\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}\Pi \right), \quad \beta = c \left(P + \frac{1}{3}\Pi \right), \quad \text{tang } \omega = \frac{3P + \Pi}{4P + 3\Pi} \cdot \frac{4f}{c} \dots (6)$$

62). Quand le solide, posé librement sur deux appuis M, M' de niveau, est chargé dans son milieu A , les équations du §6. 53 s'appliquent à chaque moitié AM, AM' de la courbe qu'il affecte, parce qu'on peut le regarder comme oncatré horizontalement en A . Ainsi on nomme $2P$ la charge, $2c$ la distance MM' des appuis, $2s$ la longueur de la courbe entre ces appuis, f la fleche AC de cette courbe et ω l'inclinaison

Solide posé horizontalement sur deux appuis et chargé au milieu.



de la tangente on M ou M' , on aura pour f , $\tan(\omega)$, α et β les mêmes expressions qu'au N^o. 58.

Ces expressions impliquent que la résistance des appuis est dirigée verticalement, tandis qu'abstraction faite du frottement, elle est normale à la courbe du solide: on verra dans la discussion du second cas de résistance, comment on pourrait, pour la flexion, avoir égard à cette circonstance. Quant à la rupture, si l'on observe que la résistance $\frac{P}{\cos \omega}$, supposée normale à la courbe MAM' , se décompose en deux forces CP et $P \tan(\omega)$, respectivement parallèles aux y et aux x , la formule (B') donnera

$$\beta = P(c + f \tan(\omega)) \text{ ou } \beta = cP \left(1 + \frac{f^2}{c^2}\right) \dots \dots (1)$$

on admettant que la courbe du solide est l'élastique du N^o. 59.

65). Que le poids au lieu d'être concentré dans le milieu A , soit distribué uniformément sur toute la longueur du solide, chaque moitié sera dans le même état que si étant encastrée horizontalement au point A , elle était fléchie en même temps par le poids cp appliqué en M ou M' , et par une force contraire, égale au poids p pour chaque unité de longueur. Par conséquent, on aura

$$\alpha \frac{dy}{dx} = cp(c-x) - p\left(\frac{1}{2}cx^2 - cx + \frac{1}{2}x^2\right); \quad \lambda \frac{dy}{dx} = cp(cx - \frac{1}{2}x^2) - p\left(\frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{2}cx + \frac{1}{6}x^3\right);$$

$$\lambda y = cp\left(\frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{6}x^3\right) - p\left(\frac{1}{2}cx^3 - \frac{1}{6}cx^2 + \frac{1}{24}x^4\right) \text{ et } \beta = cpe - cp \cdot \frac{c}{6};$$

d'où

$$f = cp \cdot \frac{5c^3}{16\alpha}, \quad \tan(\omega) = \frac{5f}{6c}, \quad \beta = cp \cdot \frac{1}{6}c \dots \dots (2)$$

Donc 1^o la flèche produite par le poids αcp suspendu au milieu du solide, serait plus grande dans le rapport de $5\alpha^2$ à α , que celle qu'il produit étant répartie uniformément sur la longueur; 2^o le solide serait également rompu par un poids distribué uniformément sur la longueur et par un poids moitié moindre placé au milieu.

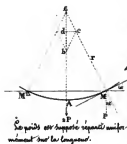
Les expressions (2) supposent la résistance de chaque appui, dirigée parallèlement aux y . Pour tenir compte de l'obliquité, quant à la rupture, on remarquera que cette résistance se décompose dans les forces cp et $cp \tan(\omega)$, parallèles aux y et aux x , de sorte que par la formule (B'), on aura

$$\beta = cp \cdot c + cpf \tan(\omega) - cp \cdot \frac{c}{6} = cp\left(\frac{1}{2}c + f \tan(\omega)\right) = cp \cdot \frac{1}{2}c \left(1 + \frac{16f^2}{5c^2}\right);$$

d'où

$$1cp = \frac{4\beta}{c + f \tan(\omega)} \text{ ou } 1cp = \frac{4\beta}{c \left(1 + \frac{16f^2}{5c^2}\right)} \dots \dots (3)$$

on admettant que la courbe est celle de l'équation qui a



donné les expressions (3).

Le dernier résultat revient au précédent, pourvu qu'on néglige le carré de $\frac{f}{c}$.

Manière d'avis égard au poids du solide.

64). Lorsque le solide sera chargé à la fois d'un poids $2P$ au milieu, et de son propre poids $2\pi p = 2\pi$, on trouvera (16. 62 et 63) en négligeant la considération de la courbure, $\frac{d^2y}{dx^2} = \dots \dots \dots$

$$(P + \pi)(c - x) - p\left(\frac{1}{2}c^2 - cx + \frac{1}{2}x^2\right); \text{ d'où}$$

$$f = (5P + 5\pi) \frac{c^3}{24}, \quad \tan \omega = \frac{3P + 3\pi}{8P + 5\pi} \cdot \frac{4f}{c}, \quad \beta = (2P + \pi) \frac{c}{4} \dots (4)$$

Mais si, par rapport à la rupture, on veut considérer cette circonstance, on aura

$$\beta = (P + \pi)(c + f \tan \omega) - \pi \cdot \frac{1}{2}c; \quad 2P = \frac{2\beta - \pi(c + 2f \tan \omega)}{c + f \tan \omega} \dots (5)$$

expressions dans lesquelles on pourra remplacer $\tan \omega$ par la valeur (4) de cette quantité.

On est ici où la charge ne répond pas au milieu de la longueur du solide, où elle est distribuée uniformément sur une portion de cette longueur et où elle est distribuée d'une manière quelconque.

65). Si le poids était suspendu à un point quelconque de la longueur du solide, ce point diviserait la courbe de flexion en deux parties dont chacune en particulier soumise à la loi de continuité aurait son équation propre et pour point de rupture, le point de suspension lui-même; puisque la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou la courbure y serait un maximum. En regardant l'une et l'autre partie comme encastées au point de rupture et observant qu'attraction faite de la courbure et du frottement, les résistances des appuis équivalent aux composantes verticales du poids, on formera aisément les équations différentielles des deux courbes partielles et l'on déterminera les constantes d'intégration par les conditions qu'au point de rupture l'ordonnée et l'inclinaison de la tangente aient les mêmes valeurs pour les deux courbes.

Lorsque le solide sera chargé uniformément sur une partie donnée de sa longueur, le milieu de cette portion sera le point de rupture commun des deux parties de la courbe de flexion, lesquelles pourront être regardées l'une et l'autre comme encastées en ce point et l'on obtiendra leurs équations particulières en suivant la marche indiquée ci-dessus.

En général, quelle que soit la disposition de la charge sur la longueur du solide, on assignera d'abord la résistance de chaque point d'appui et la position du point de rupture, lequel répond au maximum relatif de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et se trouve dans la verticale passant par le centre de gravité de la charge; on formera ensuite autant d'équations différentielles qu'il y aura de parties de chaque côté du point de rupture, pour lesquelles les conditions de la flexion ne pourront avoir la même expression

Les constantes introduites par l'intégration se déterminent de manière que l'ordonnée et l'inclinaison de la tangente aient les mêmes valeurs pour le point commun à deux parties consécutives.

La figure de la courbe que le solide affecte étant connue, on exprimera généralement les conditions de l'équilibre de résistance à la rupture, en égalant le moment de rupture β , à la valeur que prend $\lambda \frac{dy}{dx}$ pour le point de rupture, c'est-à-dire, au moment relatif à ce point, des forces qui sollicitent l'une ou l'autre des deux parties séparées par ce même point.

Solide horizontal, maintenu à une des extrémités, appuyé par l'autre et chargé d'un poids

66). Considérons un solide AMM' , encastré horizontalement à l'extrémité A , porté librement par l'extrémité M sur un appui au même niveau que le point A et chargé en M d'un poids $2P$.



Désignons par y , c les distances AB , AM' et par $2Q$ l'effort exercé sur l'appui M , effort qu'on ne peut trouver a priori, parce que le poids $2P$ est soutenu en partie par la résistance à la flexion; nous aurons d'abord pour la partie AM de la courbe du solide, $\lambda \frac{dy}{dx} = 2P(y-x) - 2Q(c-x)$ et en intégrant $\lambda \frac{dy}{dx} = 2P(yx - \frac{x^2}{2}) - 2Q(cx - \frac{x^2}{2})$; $\lambda y = P(yx^2 - \frac{x^3}{3}) - Q(cx^2 - \frac{x^3}{3})$.

Nous aurons en second lieu, pour la partie MM' , $\lambda \frac{dy}{dx} = -2Q(c-x)$ la force $2Q$ devant être affectée du signe $-$, parce qu'elle tend à diminuer les y ; d'où en intégrant et déterminant les constantes par la condition que, pour $x=c$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y soient égales à celles qui résulteraient des équations précédentes,

$$\lambda \frac{dy}{dx} = Py^2 - Q(2cx - x^2), \lambda y = P(y^2x - \frac{y^3}{3}) - Q(cx^2 - \frac{x^3}{3}).$$

De ce que cette dernière équation doit donner $y=0$, pour $x=c$, on conclut

$$Q = P \frac{y^2(3c-y)}{2c^2},$$

c'est la valeur de l'effort exercé sur le point d'appui M ; elle fait voir que Q est moindre que P , entre $y=0$ et $y=c$, d'où résulte $Q=0$ et $Q=P$. La substitution de cette valeur dans la même équation et dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$ égale à zéro, fait connaître la valeur de l'abscisse c du point dont l'ordonnée est la plus grande et la valeur de cette ordonnée ou de la flèche f de la courbure, valeurs qui sont

$$c = c(1 - \sqrt{\frac{c-y}{3c-y}}), \quad f = \frac{P}{\lambda} \frac{y^2}{3} (c-y) \sqrt{\frac{c-y}{3c-y}} \dots \dots (1)$$

et dans lesquelles le radical est pris avec le signe $-$, parce que c est moindre que 0 .

Au point A , on a $\lambda \frac{d^2y}{dx^2} = 2(P\gamma - Qc)$, et au point M , $\lambda \frac{d^2y}{dx^2} = -2Q(c - \gamma)$; c'est donc au premier de ces points que la courbure est la plus grande ou que le solide tend à se rompre; ainsi l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture est

$$\beta = \frac{P\gamma(\gamma - c)(\gamma - 2c)}{c^2} \dots \dots \dots (2)$$

Lorsque le poids $2P$ est placé au milieu de l'intervalle AM on que $c = 2\gamma$, il vient

$$Q = \frac{2}{15}P, \quad c = 2\gamma(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad f = \frac{P}{\lambda} \frac{\gamma^3}{3\sqrt{3}} \dots \dots \dots (3)$$

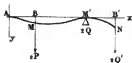
La comparaison de cette valeur de f avec celle du No. 62, montre que, pour un même poids, les fleches de courbure, quand le solide est encastré à une extrémité ou librement sur deux appuis, sont dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$. L'ordonnée au milieu de la longueur, où le poids se trouve, est $\frac{P}{\lambda} \frac{2\gamma^3}{45}$, c'est-à-dire les $\frac{2}{15}$ de ce qu'elle était (No. 62).

Dans cette hypothèse sur la position du poids $2P$, la formule (2) se réduit à

$$\beta = P \frac{3\gamma}{4} \dots \dots \dots (4)$$

donc, à force égale, le solide peut supporter un poids plus grand dans le rapport de 4 à 3, que si chacune de ses extrémités pouvait librement sur un appui (No. 62)

Solide encastré par ses deux extrémités et chargé d'un poids.



67). Que le solide, chargé en M d'un poids $2P$, soit encastré horizontalement par ses deux extrémités A & B ; on pourra, sans changer son état d'équilibre, supposer qu'il porte librement sur un appui par l'extrémité M' , & que prolongé au-delà, jusqu'à un point quelconque N , il soutiendrait en ce point une charge telle que la tangente en M' à la courbe qu'il affecte est horizontale. Désignant donc par $\gamma, 2c, \gamma'$ les distances AB, AM', AB' ; par $2Q$ l'effet exercé sur l'appui M' et par $2Q'$ le poids suspendu en N ; nous aurons d'abord, pour la portion AM de la courbe du solide,

$$\lambda \frac{d^2y}{dx^2} = P(2\gamma x - x^2) - Q(4cx - x^2) + Q'(2\gamma'x - x^2), \quad dy = P(\gamma x^2 - \frac{1}{3}x^3) - Q(2cx^2 - \frac{1}{3}x^3) + Q'(\gamma'x^2 - \frac{1}{3}x^3) \dots (5)$$

Nous aurons ensuite pour la portion $M'M'$ de la courbe, $\lambda \frac{d^2y}{dx^2} = -2Q(2c - x) + 2Q'(\gamma' - x)$, et en déterminant les constantes d'intégration de manière que, pour $x = \gamma$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui résulteraient des équations précédentes (1)

$$\lambda \frac{d^2y}{dx^2} = P\gamma^2 - Q(4cx - x^2) + Q'(2\gamma'x - x^2), \quad dy = P(\gamma^2 x - \frac{1}{3}\gamma^3) - Q(2cx^2 - \frac{1}{3}x^3) + Q'(\gamma'x^2 - \frac{1}{3}x^3) \dots (6)$$

Or, le coefficient $\frac{dy}{dx}$ et l'ordonnée y doivent être nuls au

point M' , qui répond à $x = 2c$; d'où l'on conclut

$$P\gamma^2 - 4Qc^2 + 4Q'(\gamma'c - c^2) = 0, P(2\gamma^2c - \frac{4}{3}\gamma^3) - Q\frac{4}{3}c^3 + 4Q'(\gamma'c^2 - \frac{2}{3}c^3) = 0; \text{ et}$$

$$Q = P \frac{\gamma^2(\gamma'c - \gamma\gamma' - 4c^2 + 3\gamma'c)}{4c^3(\gamma' - 2c)}, \quad Q' = P \frac{\gamma^2(2c - \gamma')}{4c^3(\gamma' - 2c)};$$

valons donc la substitution dans les équations (1) et (2) fera connaître la figure du solide, indépendamment de γ' qui disparaîtra de lui-même.

Si la charge $2P$ répondait au milieu de l'intervalle AM' , on qu'on eût $\gamma' = c$, il viendrait

$$Q = P \frac{2\gamma^2 - 3c}{4(\gamma' - 2c)}, \quad Q' = \frac{c}{4(\gamma' - 2c)}.$$

Substituant dans les équations (1), après y avoir fait $\gamma' = c$, on a, pour la première moitié de la courbe,

$$\lambda \frac{dy}{dx} = P \left(\frac{cx}{4} - \frac{x^2}{4} \right), \quad \lambda y = P \left(\frac{cx^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right)$$

et l'on trouve que, par les mêmes substitutions, les équations (2) donnent, pour la seconde moitié, une figure symétrique de celle de la première.

L'ordonnée du milieu de la courbe ou la flèche de courbure, est

$$f = \frac{P}{\lambda} \frac{c^3}{12} \dots \dots \dots (3)$$

c'est-à-dire, le quart de celle qu'on a trouvée (No. 62), quand le solide était posé librement sur deux appuis.

Dans l'hypothèse actuelle, la courbure est la plus grande aux deux extrémités et au milieu du solide, qui tend à se rompre en même temps à ces trois points; par conséquent l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture est

$$\beta = P \frac{c}{4} \dots \dots \dots (4)$$

Où le poids supporté par le solide encastré à ses deux extrémités, est double de celui que ce solide supporte (No. 62), lorsqu'il est simplement appuyé.

Solide supporté par trois appuis ou par un plus grand nombre de points d'appui.

68). On sait que si une ligne inflexible, chargée de poids, s'appuie sur plus de deux points, les positions que les points d'appui peuvent supporter sont indéterminées, mais entre des limites assignables par les principes de la Statique; il n'en est pas de même lorsque la ligne est élastique: alors l'indétermination cesse tout-à-fait. Nous nous proposons une des plus simples questions de ce genre.

Un solide posé horizontalement sur trois points d'appui, qui répondent au milieu et aux extrémités M, M' de sa longueur, supporte des poids P, P' dans les milieux N, N' de ces deux moitiés; il s'agit de déterminer les positions que les appuis souffrent et



la figure que le solide affecte. Désignons par c la demi-longueur AM ou AM' ; par p, q, q' les résistances des appuis A, M, M' et par ω l'angle que fait avec l'axe AX , la tangente à la courbe au point A .

L'équilibre absolu ou de situation (N° 33) exige 1° que la somme des forces soit active ou passive se réduise à zéro; 2° que la somme des moments de ces forces par rapport à un point quelconque, savoir, le point A , soit nulle; ce qui donne

$$P + P' = p + q + q'; \quad P - P' = 2(q - q') \dots \dots \dots (1)$$

Regardant ensuite le solide comme encasté en A , on formera aisément les équations distinctes des parties AN, NM , et quant à celle-ci, on déterminera les constantes d'intégration, par la condition que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y , relatives à $x = \frac{c}{2}$ soient égales pour les deux parties.

De ces équations, on déduira celles des parties $AN', N'M'$, par la substitution de P' à P , de q' à q et le changement du signe de $\tan \omega$, et si l'on pose simultanément $y=0, x=c$, dans les équations finies des parties $NM, N'M'$, on aura, outre les quantités $\tan \omega, q$ et q' , deux équations qui, avec les deux précédentes, détermineront ces trois quantités et la quatrième p , lesquelles, excepté la première, seront indépendantes de δ ou de la flexibilité du solide.

C'est au point A que la courbure sera la plus grande ou que le solide tendra à se rompre; de là l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture.

En faisant $P'=P$, on retombera sur les résultats du N° 66.

69). Les formules qui viennent d'être exposées serviront à déterminer la résistance qu'opposent à la flexion ou à la rupture, les corps horizontaux, appuyés ou encastés par leurs extrémités et sollicités par des forces perpendiculaires à leur longueur.

Pour appliquer ces formules à un solide proposé, il faudra y substituer à la place de δ ou de β , les expressions du moment d'élasticité et du moment de rupture, convables à la figure de la section transversale du solide. On attribuera ensuite aux constantes A et B qui entrent dans ces expressions, les valeurs propres à la nature du solide et qui doivent être déterminées par l'expérience. On appréciera ainsi, soit le degré de flexion du solide sous une charge donnée, soit la charge qui pourrait causer la rupture de ce solide.

De la détermination des coefficients d'élasticité et de ténacité; formules.

70). Les expériences les plus propres à la détermination des coefficients A et B , consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu par

des poids de plus en plus grands et à observer ou la flèche de courbure produite par chaque poids ou seulement le poids et la flèche de courbure, sous lesquels la rupture est près de s'opérer.

Lorsque la section transversale sera un rectangle d'une largeur a et d'une hauteur b , on aura (N^o 50) $2 = A \frac{ab^3}{12}$, $\beta = B \frac{ab^3}{6}$; puis par la théorie de la résistance, et abstraction faite du poids du solide, $\xi = 2P \frac{(2c)^3}{4ab^3}$, $\beta = cP \left(1 + \frac{3\xi^2}{4c^2}\right)$; d'où résulte, quant à la flexion,

$$A = 2P \frac{(2c)^3}{4ab^3\xi} \dots \dots \dots (1)$$

et quant à la rupture,

$$B = 2P \frac{3c}{ab^3} \left(1 + \frac{3\xi^2}{4c^2}\right) \dots \dots \dots (2)$$

se étant l'intervalle des appuis et $2P$ le poids posé sur le milieu de la longueur du solide.

Si l'on veut avoir égard au poids 2π du solide, il faut, suivant ce qu'on a vu (N^o 64), ajouter $\frac{5}{8} \cdot 2\pi$ à $2P$ dans la formule (1) et employer l'expression (5) de β , donnée dans le N^o 61, on aura ainsi, pour la flexion,

$$A = (2P + \frac{5}{8} \cdot 2\pi) \frac{(2c)^3}{4ab^3\xi} \dots \dots \dots (3)$$

et pour la rupture,

$$\tan \omega = \frac{3P + 2\pi}{8P + 5\pi} \frac{4\xi}{c}, \quad B = \frac{(2P + 2\pi)(c + \xi \tan \omega) - c\pi}{\frac{3}{2} ab^3} \dots \dots (4)$$

Quand les solides auront peu de longueur on ne prendront qu'une petite flèche de courbure, à l'instant de la rupture, on pourra négliger dans l'expression (3) de B et dans celle qui provient de l'élimination de $\tan \omega$, entre les formules (4), le terme du second ordre $\frac{\xi^2}{c^2}$, introduit par la considération de cette courbure, ce qui revient à faire $\tan \omega = 0$ dans l'expression (4) de B . On aura donc, selon qu'on fera ou non abstraction du poids du solide.

$$B = 2P \frac{3c}{ab^3} (5), \quad B = (2P + \pi) \frac{3c}{ab^3} \dots \dots \dots (6)$$

Ainsi qu'on le trouverait directement (N^o 61 et 64).

71). Nous rapporterons d'abord les résultats des expériences concernant la flexion, qui doivent servir à déterminer les valeurs du coefficient A , relativement à divers corps. Pour obtenir ces valeurs avec exactitude, il faut que la flexion ait été fort petite; car dès que l'extension ou la compression des fibres, approche du terme de la rupture, la résistance de ces fibres peut cesser d'être exactement proportionnelle à leur allongement ou leur raccourcissement, comme on l'a supposé (N^o 7 et 18); ce qu'on exprime en disant que l'élasticité est altérée.

Résultats des principales expériences sur la résistance des corps petits transversalement; et à la flexion.

Bois.

72). Résultats des expériences de Duhamel (Académie des sciences, 1763), concernant la flexion de pièces de chêne, posées horizontalement sur deux appuis et chargées au milieu de la longueur. La distance des appuis est 23" et la charge 75g.

Longueur des Pièces	hauteur des Pièces	Flèche de Courbure
pièces.	pièces.	pièces.
10	9	3 $\frac{1}{2}$
10	11 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$
12	13	1

En employant la formule (3) du 15^e 70, on conclut de ces expériences, que la valeur moyenne du coefficient A , pour le bois de chêne est

$$A = 1\,012\,000\,000 \text{ kg.} \quad (1)$$

le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids.

Il en résulte qu'une pièce de chêne, supportant une tension longitudinale de 1, ^{kg} sur chaque millimètre carré, s'allonge de $\frac{1}{1012}$.

Résultats moyens des expériences faites par M^e. Ch. Dupin, (Journal de l'Ecole Polytechnique, 17^e cahier), sur diversels espèces de bois. L'intervalle des appuis était de 1^m.

Bois soumis à l'expérience	longueur des pièces	hauteur des pièces	Charge au milieu	Flèche de Courbure
	mètres	pièces	kilogram.	mètres
Chêne de démolition, 15 ans de coupe	0,03	0,03	4	0,00585
Cypripè, un an de coupe	0,03	0,03	4	0,0072
Hêtre, un an de coupe	0,03	0,03	4	0,0089
Lapin de démolition, 25 ans de coupe	0,03	0,02	2	0,016
	0,02	0,03	2	0,0072
	0,02	0,01	0,5	0,047
	0,01	0,02	0,5	0,0112
	0,03	0,01	1	0,0801
	0,01	0,03	1	0,007
	0,06	0,02	10	0,0305
	0,02	0,05	10	0,005

La première expérience, sur le bois de chêne, donne pour le coefficient A , la valeur

$$A = 1\,688\,000\,000 \text{ kg.} \quad (2)$$

Les expériences sur le bois de lapin donnent moyennement,

$$A = 1\,019\,000\,000 \text{ kg.} \quad (3)$$

Résumé moyen des expériences faites sur des pièces de bois de chêne et de sapin, par M. Poncelet (Tom. 4, page 514). L'équarrissage était de 1^m

Bois soumis à l'expérience	Section des appuis	Charge au milieu	Flèche de courbure
Chêne..	pouces. 48	tonnes. 100	lignes. 11,5
Sapin..	42	100	11

Il suit de ces expériences que la valeur moyenne du coefficient A , pour le chêne et pour le sapin, est environ

$$A = 1\ 500\ 000\ 000 \text{ } ^{14}$$

Sur forge.

75). Le tableau suivant est formé d'après les expériences faites par M. Duhamel (Essai théorique 65) sur des pièces de fer forgé, posées horizontalement et chargées au milieu. Les résultats sont ramenés par le calcul à la charge constante de 10¹⁴.

Pièces soumises à l'expérience.	Intervalle des appuis	Longueur des pièces	hauteur des pièces	Flèche de courbure
	mètres	millimètres	millimètres	millimètres
Fer du Périgord. La section transversale est un triangle équilatéral, de 0 ^m ,038 de côté	3	,6
(La flèche est la même en posant la pièce sur une face ou une arête)				
Fer du Périgord	1, ..	61, ..	5,5.	12,67
Même pièce	0,5.	61 ..	5,5.	1,71
Fer d'Angleterre, tel qu'il sort des grandes forges. . .	3,035	34, ..	8,56	136, ..
Même pièce	3,075	8,56	34, ..	13,5
Fer du Périgord	2, ..	30, ..	11, ..	24, ..
Même pièce	1, ..	30, ..	11, ..	3, ..
Fer du Périgord, doux (destiné pour des fers de chevaux)	2, ..	70, ..	11,2.	9,5.
Fer du Périgord	1, ..	68, ..	11, ..	1,5
idem (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	2, ..	45, ..	12, ..	12, ..
Fer du Périgord	2, ..	40, ..	11,5	21, ..
Même pièce	1, ..	40, ..	11,5	2,5.
Même pièce	2, ..	11,5.	40, ..	1,67
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge) .	3, ..	77, ..	14, ..	14,4.
Fer d'Angleterre, marqué B (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	1,5.	67,8.	14,7.	3, ..
Fer du Périgord	3, ..	25, ..	15, ..	37, ..
Même pièce	3, ..	15, ..	25, ..	14, ..

For du Périgord	1, . . .	58, . .	16, 3.	0, 57
Idem	3, . . .	39, . .	19, 6	10, 8.
Même pièce	3, . . .	19, 6.	39, . .	2, 8.
For du Périgord	2, . . .	60, . .	20, . .	2, . .
Idem	3, . . .	60, . .	20, . .	6, 6.
Même pièce	3, . . .	20, . .	60, . .	0, 75
For du Périgord	5, . . .	120, . .	20, . .	15, . .
For des Landes	2, . . .	120, . .	21, . .	1, . .
For du Périgord	3, . . .	39, . .	24, 5.	6, . .
Même pièce	3, . . .	26, 5.	39, . .	2, 33
For du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge)	3, . . .	67, . .	26, . .	2, 3.
For du Périgord	5, . . .	103, . .	30, . .	4, 78
Même pièce	5, . . .	30, . .	103, . .	0, 4.
For du Périgord	2, 92.	31, . .	31, . .	3, . .
La même pièce posée sur une arête	3, 35
Diamètre en millim.				
For rond de l'Auvergne, tel qu'il sort des grâtes forges.	3, 69.	24, 49		48, 25
Idem	2, 99.	21, 51		27, 5.
For rond Anglais, idem	2, 938	23, 62		18, . .
For rond de l'Auvergne, idem	2, 92	26, 82		10, . .
For rond de Bilbao, très-doux	2, 92	31, 8		5, . .

Il résulte généralement de ces expériences (page 54 de l'ouvrage cité) que la valeur moyenne du coefficient A , qui convient au fer forgé est

$$A = 20\,000\,000\,000^{29} \dots \dots \dots (1)$$

le mètre et le kilogramme étant toujours les unités de longueur et de poids.

Si avec cette donnée on calcule par la formule (3) du No. 70. les fleches de courbure; les plus grandes différences entre le calcul et l'expérience ne dépassent pas $\frac{1}{20}$ ou plus ou en moins.

On conclut du résultat général (1) qu'une pièce de fer forgé, supportant une tension de 1^{29} sur chaque millimètre carré de la section transversale s'allonge de $\frac{1}{20000}$.

(Avis).

71). Résultats moyens des expériences du même Auteur, sur des pièces d'acier, posées horizontalement et chargées au milieu. Les fleches de courbure répondent, comme dans le tableau précédent, à une charge de 10 kilogrammes.

Épées soumises à l'expérience.	Intervalle des appuis.	Longueur des épées.	Épaisseur des pièces.	Élévation de courbure.
Acier fondu d'Angleterre, marqué Huntsman.	0,98	13,3	5,9	32,05
Même pièce.	0,98	6,9	13,3	8,4
Acier de cimentation, d'Allemagne, marqué Fahlman, pour des sabots.	0,68	14,5	7,8	8,
Même pièce.	0,68	7,8	14,5	2,1
Acier de même espèce.	1,845	25,7	21,6	2,8
Même pièce.	1,845	21,6	25,7	2,2
Acier de même espèce.	1,845	28,5	21,9	2,6
Même pièce.	1,845	21,9	28,5	1,8
Acier de même espèce.	1,35	54,8	25,5	0,56
Même pièce.	1,35	25,5	54,8	0,27
Acier de même espèce.	1,35	52,	26,6	0,5
Même pièce.	1,35	26,6	52,	0,3

Selon ces expériences, la résistance de l'acier à la flexion est moindre que celle du fer et les résultats offrent moins de régularité.

Fer fondu.

75). Résultats moyens des expériences faites par M. Rondelet (tom. IV, page 514), sur des barres de fer fondu, posées horizontalement et chargées au milieu. Toutes ces barres ont 1^{re} d'équarrissage.

Épées soumises à l'expérience.	Intervalle des appuis.	Charge au milieu.	Élévation de courbure.
Fonte grise.	62	312	5,5..
Fonte douce.	62	312	4,6..
Fonte grise.	21	450	1,0..
Fonte douce.	21	450	0,875

La valeur moyenne du coefficient A, résultante des expériences sur la fonte grise, est

$$A = 9\ 003\ 000\ 000 \frac{1}{1000} \quad (1)$$

et celle qui résulte des expériences sur la fonte douce est

$$A = 10\ 653\ 000\ 000 \frac{1}{1000} \quad (2)$$

Résultats des principales expériences sur la résistance des corps chargés transversalement; 2^e à la rupture — 3^e à la rupture — 3^e à la rupture

76). Exposons maintenant les résultats des expériences qui concernent la rupture des corps posés perpendiculairement à leur longueur et au moyen desquelles on peut déterminer les valeurs du coefficient B.

Le tableau suivant présente les résultats moyens des expériences de Buffon (histoire naturelle, partie expérimentale, 11^e mémoire)

sur le bois de chêne nouvellement abattu. L'intervalle des appuis que nous avons désigné dans la théorie par $2c$ était moindre de $\frac{1}{10}$ que les longueurs des pièces.

Epaisseur des pièces.	Longueur des pièces.	Poids des pièces.	Charge en unités, qui a rompu.	Flèche à l'instinct de la rupture	
4	7	58	5312	4	0
	8	66	4550	4	2
	9	74	4025	5	2
	10	83	3612	6	2
	12	99	2987	7	0
5	7	92	11525	2	6
	8	101	9787	2	9
	9	116	8308	3	5
	10	130	7125	3	10
	12	155	6075	5	8
	14	177	5310	8	1
	16	207	4350	8	1
	18	232	3710	8	1
	20	261	3225	9	5
	22	281	2975	11	5
	24	309	2162	12	3
	28	362	1775	20	0
6	7	127	18950
	8	148	15815	2	5
	9	165	13150	2	8
	10	187	11250	3	3
	12	223	9100	4	1
	14	255	7475	4	4
	16	293	6362	5	8
	18	333	5562	7	11
	20	376	4950	9	2
7	8	223	26050	2	8
	9	226	22350	3	0
	10	253	19475	2	10
	12	302	16175	3	2
	14	381	13225	3	11
	16	406	11000	5	0
	18	452	9245	5	8
	20	503	8575	8	2
8	10	331	27750	2	8
	12	396	23450	3	0
	14	460	19775	3	6
	16	526	16375	4	6
	18	594	13200	4	3
	20	662	11487	6	3

En calculant la valeur de B par la formule (A) du N^o 70, au moyen des données de l'expérience sur une pièce de 6^m d'équarrissage et de 18^m de longueur, on trouve :

$$B = 5\,862\,000 \frac{1}{10^9} \dots \dots \dots (1)$$

Les valeurs de B résultantes de toutes ces expériences ne présentent que des différences qui peuvent être attribuées à la diversité des qualités de bois, ou aux erreurs des observations. Il n'en serait pas de même, si l'on négligeait le poids des pièces et la considération de la courbure.

Expériences de Bélidor (science des Ingénieurs, page 318) sur des barreaux de bois de chêne.

Longueur des Pièces	Épaisseur	Distances des appuis	Charge au milieu qui rompt	Observations.
1 ^{toise}	1 ^{toise}	18 ^{toises}	406 ^{livres}	Non encadrée aux extrémités,
1	1	18	608	Encadrée aux deux extrémités.
2	1	18	805	Non encadrée.
1	2	18	1580	Idem
1	1	36	137	Idem
1	1	36	283	Idem
2	2	36	1585	Idem
30 lignes	38 lignes	36	1660	Idem

Expériences faites par M^r Bordalet (tom. 4, pag. 71 et 514), sur des barreaux, en bois de chêne et de sapin.

Indication des Bois	Longueur des Pièces	Épaisseur des Pièces	Distances des appuis	Charge au milieu qui rompt	Flèche à l'instant de la rupture
Chêne	2 ^{toises}	2 ^{toises}	18 ^{toises}	608	2304
	2	2	18	3105	"
	2	3	26	5133	"
	3	2	26	3675	"
	1	1	42	872	32
	1	1	31	585	7
Sapin	1	1	42	281	32

Sur fond

77). Résultats moyens des expériences faites au Creuset, par Ramand, (Mécanique d'Hattenfatz, tome 1, page 47). Les barreaux ont 0^m 082 d'équarrissage. Ils sont encadrés à une extrémité. Le poids qui cause la rupture a un bras de levier de 2^m 11.

Fonte mise en expérience.		Charge qui rompt
		kilogram.
Fonte blanche du Creuset, 1. ^{re} fusion		586
Fonte grise du Creuset, 1. ^{re} fusion		895
Résultat moyen donné par des fontes grises de divers pays, .. 2. ^{re} fusion		873
Fonte grise du creuset, 2. ^{re} fusion		911

La formule (6) du N.^o 70, c'est-à-dire,

$$B = (2P + \pi) \frac{2G}{R\delta};$$

appliquée au résultat moyen des expériences sur les fontes grises donne

$$B = 32\ 460\ 000 \frac{kg}{m^2} \quad (1)$$

Mais cette valeur est un peu incertaine, parce que les expériences ne font pas connaître avec précision la longueur du bras du levier et parce qu'on néglige l'effet de la courbure de la pièce.

Résultats de diverses expériences faites à l'Ecole des Ponts et Chaussées, et rapportés par M.^r Pauthier (Traité de la construction des ponts, tome 2, page 150).

Équarrissage des Poutres	Intervalle des Appuis	Charge au milieu qui rompt	Nombre proportionnel à la résistance
mètre	mètre	kilogram.	
0,0271	0,122	3163	19,3
0,0271	0,266	1943	23,9
0,0541	0,266	9178	16,1
0,0541	0,353	5752	12,8
0,0541	0,266	13006	20,0
0,0541	0,487	7250	22,2

Les nombres de la dernière colonne, multipliés par 1 500 000 donneront les valeurs du coefficient B, dont la moyenne est

$$B = 28\ 100\ 000 \frac{kg}{m^2} \quad (2)$$

Expériences faites par M.^r Rondelet (tom. IV, page 514). Les barreaux ont 1.^{re} d'équarrissage.

Fonte mise en expérience.	Étendue du appareil	Charge au milieu qui rompt	Charge moyenne	Éléc- tion à l'instant de la rupture
Fonte grise	42	450	450	6, 25
Idem		450		6, 75
Fonte douce	42	650	656	15, 75
Idem		1062		14, ..
Idem		350		4, 25
Idem		561		10, 5.
Fonte grise	31	540	795	1, ..
Idem		1050		2, ..
Fonte douce	31	1650	1461	5, 25
Idem		1272		2, ..

La valeur du coefficient B , déduite du résultat moyen des expériences sur la fonte grise, est

$$B = 17\,973\,000 \text{ } ^{kg} \quad (3)$$

et sur la fonte douce

$$B = 29\,420\,000 \text{ } ^{kg} \quad (4)$$

On peut juger par ces résultats que la résistance du fer fondu à la rupture est environ quatre fois plus grande que celle du bois de chêne.

Il n'existe pas d'expériences concluantes sur la résistance du fer forgé à la rupture causée par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur des pièces.

On trouve dans le Journal de Physique, année 1774, quelques expériences de M.^e Panthey, sur la résistance de la pierre et de la brique à la rupture produite par un effort qui s'exerce perpendiculairement à la longueur des solides, et dans les recherches de M.^e Viat, sur les chaux de construction, de semblables expériences concernant divers espèces de mortiers.

Les annales de Physique et de Chimie (tom. IX, septembre, 1818) offrent aussi les résultats d'un grand nombre d'expériences faites en Angleterre, par M.^e G. Ronnis, sur les différents genres de résistance des corps de divers matériaux.

78). La théorie de la résistance des solides à la rupture sous un effort dirigé transversalement, est fondée (N^o. 7 et 18) sur l'hypothèse que les résistances des fibres, à l'instant de la rupture, sont encore proportionnelles aux extensions ou contractions de ces fibres, et égales pour des extensions et contractions égales. Or la position de l'axe d'équilibre, suivant lequel le plan

Remarque sur la théorie de la
Résistance à la rupture.

de la section coupe la surface cylindrique des fibres de longueur invariable, est déterminée par la formule (a) du N^o 43; on voit que cet axe, répond au milieu de la hauteur de la section, quand il on partage la figure en deux parties symétriques, comme dans le rectangle et le cercle.

Si cette hypothèse s'accordait exactement avec les phénomènes réels, les valeurs du coefficient B, trouvées dans les deux N^{os} précédents, ne différeraient point des résultats obtenus par les expériences directes sur la rupture des corps, produites par extension ou par écrasement. La différence, lorsqu'il en existe une, doit être attribuée à ce que les fibres des corps n'opposent pas, dans le moment de la rupture, à l'extension et à la compression, des résistances égales, l'axe d'équilibre change de position, et l'expression du moment de rupture ne s'accorde pas avec le véritable état du solide.

Une expérience remarquable, imaginée par Duhamel, manifeste cette circonstance: elle consiste à tior transversalement une pièce de bois, du côté de la face qui devient concave dans la flexion et à remplir le trait de bois par une cale de matière dure. La force de la pièce augmente un peu, quand le trait de bois pénètre jusqu'à $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur; elle est la même, quand il pénètre jusqu'à $\frac{1}{2}$ environ et elle est un peu diminuée, quand il pénètre jusqu'à $\frac{3}{4}$.

Quoi qu'il en soit, les principaux résultats de la théorie subsistent pleinement; c'est-à-dire que les résistances des bords rectangulaires sont proportionnelles à la largeur et au carré de l'épaisseur et que les résistances des bords de figures semblables se font au cube des dimensions homologues. Mais pour des bords de figures divers, les rapports des résistances seraient changés. Au reste, on n'a pas à calculer, dans les applications, les résistances respectives des corps considérés à l'état voisin de la rupture; on les considère plutôt à un état de flexion légère, qui n'a point altéré leur élasticité et alors les résultats théoriques conviennent sensiblement à la manière dont la résistance s'exerce.

De la résistance des Solides posés verticalement et chargés sur l'extrémité supérieure.

5.^e cas de la résistance des solides à la flexion et à la rupture qui en résulte.

79). Lorsqu'un solide d'une certaine longueur relativement aux dimensions de la section transversale est posé suivant son axe, on observe qu'il fléchit avant de rompre, si la pression est suffisante. Pour exprimer en ce cas, les conditions de l'équilibre de résistance

à la flexion et à la rupture qui en provient, nous ferons $Y=0$, $Y'=0$ et, pourvu que la flexion soit petite, $\frac{d^2Y}{dx^2}=0$, dans les équations générales (B) et (B') qui se réduiront à

$$\alpha \frac{d^2Y}{dx^2} = XY \dots (d), \quad \beta = XY \dots (e)$$

Solide poli verticalement, et chargé sur l'extrémité supérieure.



80). Considérons un solide appuyé par l'extrémité inférieure A sur un plan horizontal inébranlable, et chargé d'un poids Q sur l'extrémité supérieure M, laquelle se trouve avec l'autre dans la même verticale AM: nous aurons $X=-Q$, et parce que les signes de Y et de l'équation du rayon de courbure doivent être changés,

$$-\alpha \frac{d^2Y}{dx^2} = QY, \quad \beta = QY.$$

Multippliant la première de ces équations par $x \, dY$ et intégrant, on trouve d'abord $-\alpha \frac{dY}{dx^2} = QY^2 + C$. Soit f la valeur de Y , qui répond à $\frac{dY}{dx}=0$, c'est-à-dire, la plus grande ordonnée de la courbe, ou la flèche de courbure; il viendra $\frac{dY}{\sqrt{f^2 - Y^2}} = dx \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$; intégrant de nouveau et observant que $x=0, Y=0$ simultanément, on obtient l'équation

$$Y = f \sin x \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}.$$

Désignons par c la distance AM et par K un nombre entier quelconque; comme on doit avoir $Y=0$ pour $x=c$, il faudra, si f n'est pas nul, que la relation $c \sqrt{\frac{Q}{\alpha}} = K\pi$, soit satisfaite; d'où

$$Q = K^2 \pi^2 \frac{\alpha}{c^2} \dots (1), \quad Y = f \sin K \pi \frac{x}{c} \dots (2)$$

Appelant s la longueur donnée de la courbe AMM, cherchons l'expression de f en fonction de s et des autres données;

nous aurons $s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dx^2}} = \int dx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dY^2}{dx^2} - \frac{1}{8} \frac{d^4Y^2}{dx^4} \dots\right)$; or, l'équation (2) donne $\frac{dY}{dx} = K\pi \frac{f}{c} \cos K\pi \frac{x}{c}$, ou $\frac{dY^2}{dx^2} = K^2 \pi^2 \frac{f^2}{c^2} \left[1 + \cos 2K\pi \frac{x}{c}\right]$; donc en négligeant les puissances de $\frac{dY^2}{dx^2}$, supérieures à la seconde, intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=c$ et remarquant que $\sin 2K\pi = 0$, quel que soit le nombre entier K , on aura cette seconde relation

$$s = c \left[1 + \left(K\pi \frac{f}{2c}\right)^2\right] \dots (3)$$

de laquelle, on négligeant les quatrième puissances de $\frac{f}{2c}$, on tire $\frac{f^2}{c^2} = 1 + K^2 \pi^2 \frac{f^2}{2c^2}$; d'où

$$f^2 = \frac{2s^2}{K^2 \pi^2} \left(1 - \frac{c^2}{s^2}\right) \dots (4)$$

on, en substituant pour c^2 la valeur liée de (1)

$$f^2 = \frac{2s^2}{K^2 \pi^2} \left(1 - \frac{\alpha K^2 \pi^2}{Q s^2}\right) \dots (5)$$

Or, 1°. la moindre valeur dont K soit susceptible est l'unité; ainsi, tant qu'on aura $Q \leq \frac{\alpha \pi^2}{s^2}$, la valeur de f sera

imaginaire, c'est-à-dire que le solide ne pourra être maintenu courbé, et reviendra à la forme rectiligne. On est donc conduit à cette conséquence singulière que la force ou le poids Q doit surpasser la quantité $\frac{\Delta \pi^2}{8}$ pour que le corps, considéré physiquement, puisse subir une flexion aussi petite qu'on voudra. Cette quantité $\frac{\Delta \pi^2}{8}$ qui constitue la limite des poids qu'un corps peut supporter sans fléchir est en raison directe du moment d'élasticité et inverse du carré de la longueur; la remarquable qui s'accorde parfaitement avec l'observation (*) Quand le poids Q excédera un peu la limite dont il s'agit, le corps pourra être maintenu courbé: on aura $\frac{\Delta \pi^2}{8} = 1 - \delta$, δ étant une quantité réelle et très-petite; l'équation (5) en regard à la valeur $K=1$, donnera

$$K=1, f = \frac{5\sqrt{2}}{\pi} \delta \quad (6)$$

et l'équation (3) de la courbe deviendra

$$y = \frac{5\sqrt{2}}{\pi} \delta \sin \frac{\pi}{c} x \quad (7)$$

A mesure que Q et par conséquent δ croîtront, la flexion du corps augmentera; en sorte que la véritable courbe diffiera de plus en plus de celle qu'exprime l'équation (7) qui n'est qu'une approximation et qui suppose la flexion très-petite.

2°. Or si que Q sera devenu un peu plus grand que la quantité $\frac{\Delta \pi^2}{8}$, on qu'on aura $\frac{\Delta \pi^2}{8} = 1 - \delta^2$, δ étant une quantité réelle et très-petite, on satisfera encore à l'équation (5) en prenant

$$K=2, f = \frac{5\sqrt{2}}{2\pi} \delta' \quad (8)$$

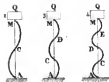
ce qui suppose aussi la valeur de f très-petite, et par la substitution dans (3), il viendra

$$y = \frac{5\sqrt{2}}{2\pi} \delta' \sin \frac{2\pi}{c} x \quad (9)$$

pour l'équation de la courbe.

La valeur de y s'évanouit quand $x = \frac{1}{2}c$; ainsi la courbe passe par le milieu de AM et a la forme indiquée dans la figure 2.

3°. En général, lorsque Q surpassera d'une petite quantité la limite $\frac{\Delta \pi^2}{8}$, on satisfera à l'équation (5) par une valeur réelle et très-petite de f ; on pourra supposer à la courbe une forme qui s'écarte peu de l'axe AM , qu'elle coupera en un



(*) Si l'on multiplie membre à membre, l'équation (1) en f (No. 62) et l'équation $Q = \frac{\Delta \pi^2}{4c^2}$, dans laquelle c est remplacé par la distance $AM = 2c$, on trouve $Q = \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{2F}{f} c = 2,41 \cdot \frac{2F}{f} c$. Ainsi la limite Q sera donnée au moyen du rapport constant $\frac{2F}{f}$, qui s'obtient bien plus facilement par l'expérience.

nombre $K-1$ de points, non compris les deux A & B (*), comme dans les figures 3, 4 & 5.

Mais quand le poids Q excèdera la limite $\frac{\Delta \pi^2}{8}$, la courbe prendra-t-elle effectivement ces nouvelles formes ou bien une autre, qui suppose une flexion considérable et qui échappe à notre approximation ? c'est ce qui ne peut être décidé que par la solution rigoureuse de la question. Cependamment il est évident qu'un corps affecterait ces formes, si le point C ou les points C, D & E étaient maintenus dans la verticale qui en contient les deux extrémités, et que la charge eût l'une des valeurs comprises dans la formule $\frac{K \Delta \pi^2}{8}$.

Si le solide est susceptible de se rompre sous un poids qui surpasse pour la limite $\frac{\Delta \pi^2}{8}$, on voit que ξ et δ demeurent très-petits; les équations (6) et (7) subsistent jusqu'au terme de la rupture; remplaçant donc y , dans l'équation $\beta = Qy$, par la valeur (6) de ξ et observant que $\delta = \sqrt{1 - \frac{\Delta \pi^2}{Q^2}}$, on aura

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\Delta \pi^2}{Q^2}} \left(\frac{Q^2}{\Delta \pi^2} - 1 \right) \dots \dots \dots (10)$$

Résultats des principales expériences sur la résistance des solides chargés de bas — Brail.

81). Maintenant nous avons à rapporter les résultats des principales expériences sur la résistance des solides chargés verticalement.

Résultats principaux des expériences de M. Guerd (Traité, page 138, table I) sur des pièces de bois de Chine, posés verticalement et chargés sur l'extrémité supérieure.

Longueur des pièces	Longueur des pièces	Épaisseur des pièces	Perimètre flèche d'une bonne distance.	Charge qui a causé la rupture (flexion)	Charge qui a causé la rupture
mètres	mètres	mètres	mètres	kilogrammes.	kilogrammes.
2,6	0,158	0,128	0,0068	17321	
2,6	0,162	0,106	0,0056	11994	22514
2,6	0,158	0,102		11992	
2,6	0,133	0,099	0,0079	11993	
2,6	0,131	0,106	0,0068	11997	22931
2,27	0,156	0,131	0,0028	22939	
2,27	0,158	0,129		17317	
2,27	0,156	0,104	0,0062	17320	33120
2,27	0,158	0,102	0,0068	17322	28626
2,27	0,126	0,102	0,0079	11999	
2,95	0,156	0,133	0,0079	17322	

(*) Voyez Mémoires de Lagrange, Miscellanea Lammontina, 1770-1773, et Mécanique de M. Poisson, tome 1, page 212.

1,95	0,158	0,102	0,0056	17321	32997
1,95	0,16	0,102	0,0045	11974	
1,95	0,133	0,106	0,0056	17295	
1,95	0,129	0,108	0,0056	11998	
2,27	0,158	0,108	0,0029	11999	37305
2,6	0,158	0,135	0,0051	11999	
2,6	0,158	0,131	0,0045	11997	
2,6	0,187	0,158	0,0023	11998	
2,6	0,189	0,158	0,0023	11998	

Les pièces se courbent généralement sur les deux faces: on a inscrit dans le tableau la plus grande des deux premières flèches de courbure observées.

82). Résultats moyens des expériences faites par M^r Laman de (traité de Gauthier, tome II, page 48) sur des pièces de chêne de Champagne, abîes, etc, posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure.

Longueur des pièces	Épaisseur des pièces	Première flèche d'un bout observée	Charge qui a causé la flexion.	Charge qui a causé la rupture
mètre.	mètre.	mètre.	Kilogram.	Kilogram.
0,649	0,054	0,0017	5369	8861
1,298	0,054	0,0037	2863	5693
1,948	0,054	0,0045	1325	3559
0,649	0,081	0,0015	18129	23163
1,298	0,081	0,005	9246	16465
1,948	0,081	0,0042	4793	11619
0,649	0,108	0,0014	37211	40921
1,298	0,108	0,0015	21488	40695
1,948	0,108	0,005	9663	37629

83). Résultats moyens des expériences faites par M^r Blondelet (tome IV, page 68), sur des pièces posées verticalement et chargées de bout. Ces pièces avaient toutes 1^{re} d'équarrissage.

Espèces de Boiss	Longueur des pièces	Charge qui a causé la rupture
Chêne.	1	6346
	12	5310
	24	2911
	36	2163
Sapin.	1	7490
	12	6358
	24	3429
	36	2575

L'auteur conclut de ces expériences la règle suivante : prenant pour unité la force capable d'écarter un cube, laquelle est (N^o 25) de 44^{kg} par ligne carrée de la section transversale, pour le chêne et 52^{kg} pour le sapin, la force capable de rompre une pièce dont la hauteur est 12 fois l'épaisseur, sera $\frac{1}{6}$

24	$\frac{1}{3}$
36	$\frac{2}{3}$
48	$\frac{1}{2}$
60	$\frac{5}{12}$
72	$\frac{2}{3}$

Selon le même auteur, une pièce de bois, chargée verticalement est susceptible de plier dès que la longueur surpasse soixant l'équarrissage.

Des forges.

84). Expériences faites à l'Ecole des Ponts et chaussées (Traité de Gauthier, tome II, page 152) sur des pièces de fer forgé, posées verticalement et chargées sur l'extrémité supérieure.

Longueur des Pièces. mètre.	Largeur des Pièces. millimètres.	Épaisseur des Pièces. millimètres.	Charge qui a causé la rupture. kilogrammes.
0,246	20,3	20,3	10626
0,325	20,3	20,3	8454
0,258	20,3	20,3	10216
0,325	13,5	13,5	3951

85). D'après un très grand nombre d'expériences faites par M^o Rondelet (tome IV, page 522) sur des pièces ayant de 6 à 12 l^g d'équarrissage et de 1^g à 30^m de longueur; et d'autant établi qu'un cube de fer forgé se comprimant sous une charge de 512^{kg} par ligne carrée de la section transversale (N^o 26), la charge nécessaire pour faire plier et rompre une barre dont la longueur est égale à 27, 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243 fois l'équarrissage, est 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1^{kg}, par ligne carrée de la section transversale.

86). Expériences faites par M^o Duhamel (Essai, page 26) sur des pièces de fer forgé, posées parallèlement à leur longueur.

Pièces soumises à l'expérience.	Longueur des Poutres.	Longueur des Poutres.	Epaisseur des Poutres.	Charge qui a causé la flexion.
	mètres.	millimètres.	millimètres.	Kilogrammes.
Fer du Périgord. La section est un triangle équilateral, de 0 ^m ,038 de côté.	3,02			860
Idem.	2,01	30	11,	190
Idem, doux (destiné pour les fers de chemin).	2,01	70	11,2	520
Même pièce, fers au milieu.				1945
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge).	2,02	45	12,	400
Fer du Périgord.	2,01	40	11,5	360
Même pièce fers au milieu.				300
Fer du Périgord (tel qu'on l'a trouvé dans la forge).	2,01	58	15,	1000
Idem.	3,02	25	15,	180
Idem.	3,02	39	19,6	780
Idem.	2,01	60	20,	2400
Idem.	3,02	60	20,	1200
Idem.	3,02	39	24,5	1320
Idem.	3,02	31	31,	2000
Fer rond, de Billas, ayant 0 ^m ,0318 de diamètre.	3,02			1285

Il résulte généralement de ces expériences qu'on calculant les charges qui causent la flexion, par la formule (C), du N^o 50 (dans laquelle on remplace λ par $A \frac{25^3}{\pi}$, pour une pièce rectangulaire ou par $A \frac{\pi^4}{4}$, pour une pièce cylindrique, et λ par 20 000 000 000^K on trouve des valeurs moindres que celles qui résultent de l'expérience, dans le rapport de 7 à 8 environ (Essai, page 36). L'auteur attribue cette différence en partie au frottement du levier au moyen duquel la pression est transmise.

Fer fondre.

87). On peut consulter sur ce sujet les expériences de M. G. Bionni, rapportées précédemment (N^o 37).

Causés qui peuvent faire différer
les résultats des expériences de ceux
de la théorie.

88). La théorie de la résistance des solides pressés parallèlement à leur longueur, suppose essentiellement la pression Q , dirigée suivant l'axe même du solide, ou du moins dans le plan mené par cet axe, et perpendiculairement auquel la flexion s'effectue. Or dans la réalité le poids d'un solide est chargé verticalement, se répartit ordinairement sur toute l'étendue de la section transversale; il faudrait donc, pour que l'expérience s'accordât exactement avec la théorie, que les solides fussent terminés aux extrémités par une pointe ou par une arête. La recherche de la

résistance, quand le poids est réparti sur toute l'étendue de la section transversale, dépend de considérations d'un autre ordre.

Dans la théorie, on a regardé le sens de la flexion du solide comme déterminé et l'on a désigné par α la valeur respective du moment d'élasticité. Lorsqu'un solide est chargé sur l'extrémité supérieure, le sens de la flexion, en général, n'est pas déterminé : il est naturel d'admettre que le solide fléchira du côté pour lequel la valeur du moment d'élasticité est la moindre possible. Si la section transversale est carrée ou circulaire, cette valeur est la même pour tous les côtés et si la section est rectangulaire, la moindre valeur du moment d'élasticité répond à la flexion du côté de la plus petite dimension. Dans les expériences, les solides à bords carrés fléchissent indifféremment dans le sens de la diagonale ou des côtés, les solides à bords rectangulaires même, à moins que les deux côtés ne soient très-différents, ne fléchissent pas toujours exactement dans le sens du plus petit côté ; la direction de la flexion étant le plus souvent déterminée par quelque défaut d'homogénéité du solide, ou par la manière dont la pression s'exerce aux extrémités.

Ces remarques expliquent pourquoi les expériences connues ne donnent pas toujours pour le poids capable de faire fléchir un solide à bords rectangulaires, chargé verticalement, la même valeur qu'on obtiendrait de la formule (C), en supposant la flexion dirigée dans le sens du petit côté de la section transversale. Mais si l'on prend les précautions convenables pour accorder les circonstances de l'expérience avec les hypothèses sur lesquelles les formules sont fondées, alors ces formules représentent exactement les résultats de l'expérience.

De la résistance des solides chargés obliquement.

3^e cas de la résistance des solides à la flexion; solide incliné, encastré à l'extrémité inférieure et chargé sur sa tête à l'extrémité supérieure.



89). Soit un solide AM encastré obliquement, par son extrémité inférieure A et chargé d'un poids Q à son extrémité supérieure M . Désignons par ϵ l'angle que forme avec la verticale la direction primitive Ax du solide, et par c, f les coordonnées AB, BM de l'extrémité M ; l'équation générale (B), à cause de $\frac{1}{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $x' = c, y' = f$ et de $X = -Q \cos \epsilon$, $Y = Q \sin \epsilon$, deviendra d'abord

$$A \frac{d^2y}{dx^2} = (c-x) Q \sin \epsilon + (f-y) Q \cos \epsilon \dots \dots (f),$$

et si, pour abréger, l'on fait $\frac{Q \sin \varepsilon}{\lambda} = p^2$, $\frac{Q \cos \varepsilon}{\lambda} = q^2$, $c - x = u$,
 $f - y = v$, elle se réduira

$$d^2 v + q^2 v du^2 = -p^2 u du^2,$$

équation du premier degré et du second ordre, dont l'intégrale
 (Voyez, Lacroix, page 449) est $v = C \sin q u + C' \cos q u - \frac{p^2}{q^2} u$,
 c'est-à-dire,

$$f - y = E \sin q(x + F) - \frac{p^2}{q^2}(c - x) \dots \dots (1)$$

Où, on doit avoir, au point A, $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; et au
 point M, $x = c$, $y = f$; d'où $f = E \sin q F - \frac{p^2}{q^2} c$, $0 = q E \cos q F + \frac{p^2}{q^2}$,
 $0 = E \sin q(c + F)$; ainsi, il vient par là $\sin q F = \sin q c$, $\cos q F =$
 $-\cos q c$, $E = \frac{p^2}{q^2 \cos q c}$ et conséquemment

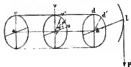
$$f = \frac{p^2}{q^2} (\tan q c - q c) \dots (2), \quad y = \frac{p^2}{q^2} \left(\frac{\sin q c - \sin q(c - x)}{\cos q c} - q x \right) \dots (3)$$

Comme le rapport $\frac{f}{c}$, dont la valeur est $\tan \varepsilon \left[\frac{\tan q c}{q c} - 1 \right]$,
 doit demeurer fort petit, il faudra que le rapport $\frac{\tan q c}{q c}$ surpasse
 très-peu l'unité. Soit donc $0, \delta, \delta', \delta''$ la suite des arcs res-
 pectivement de même longueur que leurs tangentes (Euler,
 introduction à l'analyse infinitésimale, tome 2, page 323) on
 ne pourra attribuer à $q c$ que des valeurs qui ne surpassent pas
 beaucoup $0, \delta, \delta' \dots$ ou à q^2 , c'est-à-dire, à $\frac{Q \cos \varepsilon}{\lambda}$ que des valeurs
 qui n'excèdent pas beaucoup les nombres $0, \frac{\delta^2}{c^2}, \frac{\delta'^2}{c^2}, \frac{\delta''^2}{c^2}$.
 Si l'on adopte la première de ces valeurs, le solide affectera la
 courbe représentée dans la figure. Les courbes relatives aux
 autres valeurs, auraient un nombre de plus en plus grand de
 points d'inflexion, mais ne se produiraient qu'autant que les
 points correspondants du solide seraient maintenus fixement
 dans la direction AB.

Quelque tous les points de A ou B sont libres, les poids Q que
 le solide peut supporter, devront donc satisfaire à la condition
 que la quantité $c \sqrt{\frac{Q \cos \varepsilon}{\lambda}}$ soit comprise entre 0 et δ , et que la
 valeur précédente de ε , qui exprimera le déplacement du point
 M, en vertu de l'action du poids Q, soit fort petite.

De la résistance des solides à la torsion et à la rupture qui en provient.

Equations générales de l'équilibre
 de résistance à la torsion et à la rup-
 ture qui en provient.



90). Considérons un solide cylindrique a b encastré horizon-
 talement par l'extrémité a et maintenu à un certain degré
 de torsion, par une force P agissant à l'autre extrémité b,
 au moyen d'un levier bl. Soit c le point d'une section trans-
 versale quelconque uov, autour duquel la torsion s'est naturelle-

spirée. Supposons que par l'effet de cette torsion, les rayons ev et bd de la section quelconque e et de la section extrême B , qui toutes deux répondent au rayon fixe ac de l'extrémité encastrée, aient été amenés l'un en ev' , l'autre en bd' ; suivant les hypothèses établies (N^o. 19) 1^o les angles de torsion vev' dbd' sont proportionnels aux distances ae , ab ; 2^o la résistance de l'élément mm' de la section e est en raison directe tant de la différence entre les angles de torsion de cette section et d'une section antérieure quelconque, que de la distance de la molécule au pôle c et en raison inverse de la distance des deux sections. Désignons par c , la longueur ab ; par θ , l'arc qui mesure l'angle de torsion dbd' , dans le cercle dont le rayon est l'unité linéaire; par u et v les coordonnées des points de la section e ; par V , la plus grande distance de ces points au pôle c , c'est-à-dire; la distance à ce pôle, de la molécule la plus tendue, lorsque le solide est prêt de se rompre; par L , le bras du levier bl ; par A' , le poids constant qui, pour chaque genre de corps, exprime la résistance spécifique à la torsion; et par B' , la résistance rapportée à l'unité superficielle, qu'un élément de fibre oppose à sa rupture quand la torsion est prêt de l'opérer (ce poids A' représente la résistance rapportée à l'unité superficielle qu'un élément quelconque de fibre, opposerait à la torsion, si son déplacement par rapport à l'élément précédent, placé à la distance 1 sur la même fibre, était égal aussi à l'unité linéaire).

Cela posé, $\frac{\rho}{c}$ étant l'arc effectif qu'un élément dm de la section uev , pris à la distance 1 du pôle de cette section, a décrit par rapport à l'élément précédent, placé à la distance 1 sur la même fibre; et $\frac{r}{dm}$ étant le poids rapporté à l'unité superficielle, auquel équivaudrait la résistance r de cet élément dm , on a $\frac{r}{dm} = A' \frac{\rho}{c}$; donc si l'élément dm est à la distance $\sqrt{u^2 + v^2}$ du pôle de la section, sa résistance s'exprime par $A' \frac{\rho}{c} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot dm$, et le moment de cette résistance relativement au pôle c , par $A' \frac{\rho}{c} (u^2 + v^2) dm$.

Lorsque, par l'effet de la torsion, l'élément dm , placé à la distance V du pôle c , sera prêt de se rompre, $B' dm$ exprimera la résistance de cet élément à la rupture; donc la résistance de l'élément placé à la distance $\sqrt{u^2 + v^2}$, sera exprimée par $\frac{B'}{V} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot dm$, et le moment de cette résistance, par $\frac{B'}{V} (u^2 + v^2) dm$.

Ainsi, les équations de l'équilibre de résistance à la

tension et à la rupture qui en provient sont respectivement

$$A' \frac{Q}{c} \int (u^2 + v^2) dm = LP \dots (1) \quad \frac{B'}{V} \int (u^2 + v^2) dm = LP \dots (2)$$

Des pôles d'élasticité et des moments
plans d'élasticité et de rupture.

91). La valeur de l'intégrale $\int (u^2 + v^2) dm$ qui entre dans les premiers membres de ces équations, dépend, entre autres choses, de la position du point c dans la section uev ; et comme la résistance à la tension est, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnelle à cette valeur, il s'ensuit que le point de la section, autour duquel la tension s'opère naturellement, est celui pour lequel l'intégrale dont il s'agit est un minimum; or, par la propriété des moments d'inertie, le point cherché est précisément le centre de gravité de la section.

Nous nommerons pôle d'élasticité ce point autour duquel la tension s'effectue et moments plans d'élasticité et de rupture, les valeurs de l'intégrale $\int (u^2 + v^2) dm$ multipliées respectivement par A' et $\frac{B'}{V}$, moments que nous représenterons, pour abréger, par Δ' et β' ; de sorte que nous aurons

$$\Delta' = A' \int (u^2 + v^2) dm \dots (3), \quad \beta' = \frac{B'}{V} \int (u^2 + v^2) dm \dots (4)$$

ce qui réduira les équations (1) et (2) à

$$\Delta' \frac{Q}{c} = LP \dots (5) \quad \beta' = LP \dots (6)$$

la valeur de P dans (6) étant la dernière de celles dont il est susceptible dans (5).

Relation entre les expressions du
des deux moments.

92). En comparant les expressions de Δ' et de β' , on reconnaît que la seconde se déduit de la première par la simple substitution de $\frac{B'}{V}$ à A' . En outre, la valeur du moment Δ conduit, comme on va le voir, à celle du moment Δ' .

Cherchons ces moments

93). Supposons l'origine au centre de gravité de la figure ou qu'on ait $\int u dm = 0$, $\int v dm = 0$; les formules par lesquelles on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes donnent $u' = u - p$, $v' = v - q$; donc, si l'on représente $\int (u^2 + v^2) dm$ par E et $\int (u'^2 + v'^2) dm$ par E' , il viendra

$$E' = E + (p^2 + q^2) m$$

Donc le moment planaire, relatif au centre de gravité, est un minimum, et par conséquent ce centre est effectivement le pôle d'élasticité.

Quelle que soit l'origine, on a l'identité

$$\int (u^2 + v^2) dm = \int u^2 dm + \int v^2 dm$$

Donc, en général, le moment planaire est égal à la somme des moments relatifs à deux axes rectangulaires quelconques, passant par le pôle.

Le théorème donne immédiatement les moments polaires d'élasticité de toute figure dont on connaît les moments par rapport à deux axes rectangulaires, menés par le centre de gravité.

Application au rectangle, au carré, au cercle et à un polygone quelconque.

g^h). On trouve ainsi, pour le

Rectangle $\alpha' = A' \frac{a^3 b}{12} (a^2 + b^2) \dots \beta' = B' \frac{a b^3}{12} \sqrt{a^2 + b^2} \dots (3)$

Carré $\alpha' = A' \frac{a^4}{6} \dots \beta' = B' \frac{a^3}{3\sqrt{2}} \dots (4)$

Cercle $\alpha' = A' \frac{\pi r^4}{8} \dots \beta' = B' \frac{\pi r^3}{2} \dots (5)$

Donc les moments polaires d'élasticité du carré et du cercle ont dans le rapport de 1 à $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ et ceux de rupture dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

Maintenant, considérons un polygone régulier quelconque dont i soit le demi-angle au centre, h , l'apothème; a et n la grandeur et le nombre des côtés: si ABC est l'un des triangles au centre, on aura d'abord

$$i = \frac{\pi}{n} \dots (6)$$

ensuite, l'équation de AB relativement aux axes Gx, Gy , étant $v = \frac{a}{2h} \left(u + \frac{2h}{3} \right)$, on trouve

$$C = \frac{a^3 h^3}{36}, \quad D = \frac{a^3 h}{24};$$

mais, à cause de $AG = \frac{2}{3}h$, $ABC = \frac{a^2 h}{2}$, le moment par rapport à l'axe Av' sera

$$C' = \frac{a^3 h^3}{4}$$

Ainsi, on aura, pour le triangle,

$$E' = \frac{a^3 h}{48} (a^2 + n h^2)$$

De là et de ce que $h = \frac{a}{2} \cot i$, il viendra, pour le polygone,

$$\alpha' = A' \frac{n a^4 \cot^2 i}{96} (1 + 3 \cot^2 i), \quad \beta' = B' \frac{n a^3 \cot^2 i}{48} (1 + 3 \cot^2 i) \dots (7)$$

On obtient, en appliquant ces formules générales

au carré Les expressions (4)

à l'hexagone $\alpha' = A' \frac{5\sqrt{3}}{8} a^4 \dots \beta' = B' \frac{5\sqrt{3}}{8} a^3 \dots (8)$

à l'octogone $\alpha' = A' \frac{11 + 8\sqrt{2}}{6} a^4 \dots \beta' = B' \frac{\pi + 8\sqrt{2}}{3\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} a^3 \dots (9)$

gⁱ.

Accord de la théorie précédant avec les recherches de Coulomb, sur la torsion des fils métalliques.

g^b). On aura donc pour un solide cylindrique $LP = A' \frac{\pi r^4}{32c}$; ainsi le moment de la force de torsion est en raison directe de l'angle de torsion, de la quatrième puissance du rayon et en raison inverse de la longueur du solide; ce qui s'accorde parfaitement avec les résultats des recherches expérimentales de Coulomb, sur la force de torsion et l'élasticité des fils métalliques et avec ceux de la théorie du mouvement oscillatoire

de ces fils, fondée sur la supposition que la force de torsion est proportionnelle à l'angle de torsion, supposition conforme à l'expérience, tant que cet angle n'a pas une trop grande amplitude.

Usage des formules obtenues.

96). Les formules trouvées serviront à calculer soit l'angle de torsion, affecté par un solide sous un effort donné, soit l'effort capable d'opérer la rupture de ce solide, lorsque les valeurs des coefficients A' et B' auront été déterminées par des expériences préalables.

On la détermination des coefficients A' et B' est relative à la torsion.

97). Ces expériences consistent à observer simultanément l'angle de torsion d'un solide donné, le poids qui produit cette torsion et le bras de levier de ce poids. Quand il s'agit de la rupture, on n'a besoin de connaître que le poids qui l'opère et son bras de levier.

Selon que la section transversale du solide sera un cercle ou un carré, les valeurs de A' et B' , tirées des formules (5) et (6), seront

$$A' = P \frac{3cL}{\pi r^4 \theta} \dots (10), \quad A' = P \frac{6cL}{a^4 \theta} \dots (11)$$

et

$$B' = P \frac{3L}{\pi r^3} \dots (12), \quad B' = \frac{3LV_3}{a^3} \dots (13)$$

Réultats des principales expériences sur la résistance à la torsion, et à la rupture qui en provient.

98). Le fer forgé et le fer fondu sont presque les seuls corps sur lesquels il ait été fait des expériences propres à la détermination des valeurs de A' et B' .

1° Résultats des expériences faites par M. Dureau (ouvrage cité, page 30 & suivantes) sur la résistance du fer forgé à la torsion.

Le poids qui produit la torsion est 10^{kg} et son bras de levier 0,32.

Désignation des Fers.	Longueur	Grosueur	Angle de torsion	nombre proportionnel à la résistance
	mètre	millimètres	degrés centés	
Fer rond du Périgord . . .	2,81	0,0151	13,6	12,57
Idem	3,17	0,0196	6	11,67
Fer rond Anglais, marqué				
Douglas	2,40	0,0198	4	12,41
Fer rond de l'Alsace	3,37	0,0215	4,8	11,16
Idem	2,89	0,0215	4,6	9,6
Fer rond du Périgord . . .	3,19	0,0221	3,32	11,99
Idem	2,89	0,0230	3,	10,96
Fer rond Anglais	3,14	0,0235	2,36	14,48
Fer rond du Périgord . . .	2,94	0,0265	1,82	10,48
Idem	3,35	0,0267	1,87	11,23

Fer rond du Périgord	2,92	0,0357	0,615	9,19
Fer rond de l'Ariège	2,77	0,0368	1,65	10,39
Fer carré Anglais marque C ^r	4,12	côté 0,0200	6,5	17,46
Idem	2,52	0,0200	4,	17,36
Fer carré du Périgord	2,52	0,0206	3,08	15,97
Idem	3,39	0,0326	0,62	15,40
Fer plat anglais	2,91	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0340 \\ 0,0086 \end{array} \right\}$	11,4	
Idem	1,55	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0340 \\ 0,0086 \end{array} \right\}$	5,62	
Fer plat du Périgord	2,91	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0340 \\ 0,0105 \end{array} \right\}$	7,2	
Fer plat, Anglais, marque B	1,45	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0678 \\ 0,0147 \end{array} \right\}$	0,85	

Les nombres de la dernière colonne, relatif aux expériences sur les fers ronds, doivent être multipliés par 583 610 000 (*) pour donner les valeurs de la constante A' , qui résultent de ces expériences; le mètre et le kilogramme étant les unités de longueur et de poids. La moyenne entre ces nombres est 11,33 et la valeur de A' , qui y répond,

$$A' = 6\,612\,300\,000 \text{ kg}$$

Les nombres de la dernière colonne, relatif aux expériences sur les fers carrés, doivent être multipliés par 343 775 000, pour donner les valeurs de A' . La moyenne entre ces nombres est 16,03 et la valeur de A' qui y répond.

$$A = 5\,510\,713\,250 \text{ kg}$$

La différence des deux résultats tient sans doute, en grande partie, à la diversité des qualités des fers; mais peut-être pour quelque chose à ce que les formules précédentes, relatives aux corps carrés, ne représentent pas aussi exactement les phénomènes naturels que celles qui se rapportent aux corps ronds; les fibres extérieures au cylindre inscrit participant et à la résistance

(*) Soit θ l'angle qui répond à l'arc s ; on aura $\theta = \frac{\pi}{180} G$; M^r. Duhamel a calculé ses nombres proportionnels à la résistance, par la formule $H = P \frac{CL}{D^2 G}$, dans laquelle $D = 2r$; ainsi, il a $H = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\pi}{180} A'$, et, comme il prend d'ailleurs le millimètre pour unité linéaire, nous avons $A' = \frac{1000000 H}{\frac{\pi^2}{32} \cdot \frac{\pi}{180}}$; c'est-à-dire, que nous devons multiplier ces nombres par 583 610 000.

M^r. Navier prend aussi G au lieu de θ ; il a, en conséquence, $A' = \frac{1000000 H}{\frac{\pi^2}{32}} = 10\,186\,000 \text{ kg}$.

de celles de ce cylindre et à la résistance d'un corps élastique, encastré par un bout et chargé à l'autre ;

2.^e Le tableau suivant présente les résultats des expériences sur la ténacité du fer fondu et de divers autres métaux, faites par M.^r P. Ronnier (Annales de Chimie et de Physique, septième, 1818). Le bras de levier des poids était de 2^e Anglaise.

Indication des Corps soumis à la ténacité.	Longueur des Sûchers	Epaissim. des Sûchers	Poids moyen produisant la rupture	
			lignes carrés des poids liées.	onces.
Fer coulé horizontalement	0	$\frac{1}{8}$	9	15
Fer coulé verticalement	0	$\frac{1}{8}$	10	10
Fer coulé horizontalement	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	7	3
Idem	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	8	1
Idem	1	$\frac{1}{8}$	8	8
Fer coulé verticalement	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	10	1
Idem	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	8	9
Idem	1	$\frac{1}{8}$	8	5
Idem	6	$\frac{1}{8}$	9	12
Fer coulé horizontalement	0	$\frac{1}{4}$	93	12
Idem	0	$\frac{1}{2}$	74	0
Idem	10	$\frac{1}{2}$	52	0
Acier	0	$\frac{1}{8}$	17	1
Fer forgé d'Angleterre	0	$\frac{1}{8}$	10	2
Fer forgé de Suède	0	$\frac{1}{8}$	9	8
Métal de Canon dur	0	$\frac{1}{8}$	5	0
Fonte Saune fine	0	$\frac{1}{8}$	4	11
Cuivre coulé	0	$\frac{1}{8}$	4	5
Étain	0	$\frac{1}{8}$	1	7
Plomb	0	$\frac{1}{8}$	1	0

Le résultat moyen des expériences sur le fer fondu donne la valeur

$$B' = 41\,360\,000^{\text{kg}}$$

Des solides d'égal résistance.

Notions préliminaires.

39). En général, lorsqu'un solide prismatique est soumis à un effort qui tend à le fléchir, il existe dans sa longueur un point où il est plus sujet à se rompre qu'en tout autre point, et si la résistance est suffisante en ce point, elle est excessive partout.

ailleurs. On peut donc se proposer de donner à ce solide une figure telle qu'il ait en chaque point de sa longueur, précisément la face nécessaire. On appelle solides d'égal résistance ceux dont la figure satisfait à cette condition.

Les recherches de ce genre ne présentant point de difficulté, il suffira de quelques exemples simples.

Solide encasté horizontalement par une des extrémités.



100). Un solide encasté à l'extrémité A et chargé d'un poids P à l'autre extrémité B, a sa force supérieure dans un plan horizontal et ses deux faces latérales dans des plans verticaux parallèles, il s'agit de déterminer sa face inférieure.

Désignons par a la longueur ou la dimension perpendiculaire au plan ABM; par b la hauteur AM à l'extrémité encastée; par c la longueur AB et par x, v l'abscisse Bp et l'ordonnée pm du profil BM de la face inférieure.

D'abord la hauteur b sera déterminée (No. 50 et 59) par l'équation $B \frac{a b^2}{6} = c P$; d'où

$$b = \sqrt{\frac{6 c P}{B a}} \dots \dots \dots (1)$$

ensuite, la courbe BmM sera déterminée par l'équation.

$$B \frac{a v^3}{6} = P x, \text{ ou}$$

$$v^3 = \frac{b^2 x}{c},$$

qui exprime une parabole dont l'axe est BA.

Lorsque le solide est chargé d'un poids réparti uniformément sur la longueur, et qui soit p pour l'unité, on a...

$$B \frac{a b^2}{6} = p c \cdot \frac{1}{2} c; \text{ d'où}$$

$$b = c \sqrt{\frac{3 p}{B a}} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{puis } B \frac{a v^3}{6} = p x \cdot \frac{1}{2} x; \text{ d'où}$$

$$v = \frac{b x}{c},$$

équation d'une droite passant par les points B et M.

Des plus grands efforts auxquels les matériaux puissent être soumis avec sécurité dans les constructions.

Complément des données nécessaires à l'application de la théorie.

101). La théorie que nous avons exposée, fait connaître les lois de la flexion, de la torsion et de la rupture des corps, c'est-à-dire, les degrés de courbure et de torsion qu'un solide affecte sous un effort donné et l'effort capable de rompre ce solide. Cette connaissance ne met pas encore à même de régler les dimensions des corps employés dans les constructions: il faut en effet pouvoir s'assurer, non seulement que les efforts auxquels chaque solide est soumis, n'en causeront point immédiatement la rupture; mais aussi que la permanence ou la répétition fréquente de

ces efforts, ne produira point dans les parties de l'édifice des altérations qui puissent augmenter par la suite et en amener la destruction. En général, on doit disposer les constructions, de manière à n'y laisser d'autres causes de détérioration que celles qui dépendent des altérations chimiques des corps, et s'efforcer de prévenir ces altérations par des procédés d'entretien. La détermination des plus grands efforts auxquels les matériaux peuvent être soumis avec sécurité, dans les constructions n'est pas susceptible d'une précision rigoureuse; nous allons exposer les principaux résultats que l'expérience et le calcul ont fournis sur ce sujet.

Limites des efforts, relatifs à
l'écrasement et à l'action des pierres;

102). Les petits cubes de pierre soumis à l'expérience commencent à se fendiller sous les poids un peu plus grands que la moitié de ceux qui sont indiqués dans les tables comme ayant produit l'écrasement. D'ailleurs, une force moindre peut (Bondelet, tome III, page 101) opérer l'écrasement, lorsque son action s'exerce pendant longtemps. M^r. Bondelet, (tome III, page 74) donne l'indication suivante des pressions exercées sur une surface de 25 centimètres carrés, dans les constructions regardées comme les plus hardies;

Piliers du Dôme de S.^t Pierre de Rome 409^{kg}

Piliers du Dôme de S.^t Paul de Londres 484

Piliers du Dôme des Invalides 369

Piliers du Dôme de S.^t Gonçève 736

Colonnes de S.^t Paul, hors des murs à Rome 494

Piliers de la tour de l'Eglise de S.^t Méry 735

Colonnes de l'Eglise de Saint d'Angers (*) 1107

Les arches inférieures des piles du pont de Neuilly, qui sont construites en pierre de Saillancourt, supportent une pression de 364^{kg} par pied carré. Un cube de cette pierre, dont le côté a 2^m, exige, pour être écrasé, un effort de plus de 16000^{kg}.

D'après l'expérience des constructions, on ne doit pas exposer les pierres à une plus grande pression que $\frac{1}{10}$ de celle qui produit l'écrasement dans les essais faits sur de petits cubes; et même cette détermination ne donne une entière sécurité que si les pierres sont taillées et posées de manière que la pression se distribue uniformément sur toute la surface des joints, et si,

(*) Elles sont construites avec une pierre calcaire d'un gris roussâtre, coquilleuse et très-dure. Un cube de 0^m,05 de côté s'écrase sous 10960^{kg}.

par leur qualité, elles ne sont pas sujettes à se fondre et à s'éclater; autrement, il faudrait réduire l'effort.

Bois.

103). Il suit des expériences rapportées (N^o. 25 et 33) que les résistances opposées à l'écrasement et à l'extension par les fibres du bois, diffèrent beaucoup entre elles; la première n'étant que la moitié de la seconde. Cette circonstance s'accorde avec les remarques du N^o. 78. Pour le bois de chêne ou de sapin, on peut évaluer à environ 3^{kg} par millimètre carré de la section transversale, la résistance à l'écrasement, et à environ 8^{kg} la force de cohésion. Les pièces employées dans les constructions ne doivent pas être exposées à des pressions plus grandes que $\frac{1}{2}$ de celles qui causeraient l'écrasement. Cette règle peut servir à déterminer les dimensions et l'écartement des pieux de fondation: elle s'accorde avec les préceptes de Lescroart, (Rues, Mémoires sur les pieux et pilotis) fondés sur l'expérience, suivant lesquels, des pieux de 0^m. 25 et de 0^m. 32 de diamètre ne doivent pas être chargés de plus de 25 000^{kg} et de 50 000^{kg}.

En fer.

104). Les expériences rapportées (N^o. 34) apprennent que les barres de fer forgé, taillées suivant leur longueur sont rompues par un effort moyen de 10^{kg} par millimètre carré de la section transversale. Un examen attentif des résultats des expériences et l'exemple des constructions font voir que ces barres ne doivent pas être soumises à une charge permanente plus grande que 6 à 7^{kg} par millimètre carré, et à une charge totale, composée d'une partie permanente et d'une partie accidentelle, plus grande que 8 à 10^{kg} par millimètre carré.

En fer fondu.

105). Les pièces de fer fondu, qui sont trop courtes pour pouvoir plier, offrent une grande résistance à l'écrasement. Il résulte des expériences rapportées (N^o. 37) que la force capable d'opérer l'écrasement est environ 100^{kg} par millimètre carré. On ne connaît pas d'expériences d'après lesquelles on puisse apprécier exactement la limite des charges que les pièces peuvent supporter dans les constructions: mais il est très-vraisemblable que ces charges peuvent être portées à $\frac{1}{2}$ de celles qui produiraient l'écrasement.

Selon les expériences (N^o. 36), la force de cohésion du fer fondu est de 13 à 14^{kg} par millimètre carré, beaucoup moindre que la résistance à l'écrasement. Les charges peuvent également être portées, dans les constructions, à $\frac{1}{2}$ de celles qui causeraient la rupture. Mais des pièces de fer

Séparation des cas de la résistance à l'écrasement et de la résistance à la flexion.

fondue, employés de cette manière, présenteraient peu de sécurité, si la construction était exposée à de fortes secousses.

106). Les solides destinés dans les constructions à supporter une pression dirigée parallèlement à leur longueur, sont ordinairement trop courts comparativement à leur grosseur, pour qu'ils puissent céder en offrant le genre de flexion, auquel s'appliquent les résultats du N^o 80. La résistance de ces solides doit être déterminée par d'autres considérations. En effet, le moindre poids qui peut maintenir fléchi, un solide rectangulaire chargé verticalement est exprimé (N^o 80) par $Q = A \frac{\pi^2 a B^3}{12 l^3}$, c'est-à-dire, que le moindre poids dont on puisse charger l'unité superficielle de la section transversale, est

$$A \frac{\pi^2}{12} \frac{B^3}{l^3}.$$

Or, en supposant $A = 1000000000$,⁴⁹ pour le bois de chêne, et $A = 2000000000$,⁴⁹ pour le fer forgé; et comparant les résultats donnés par la formule précédente, avec ceux des expériences de M^r Bondelet; rapportés (N^o 83 et 85) on trouve que les premiers sont plus grands que les seconds, tant que l'épaisseur B n'excède $\frac{1}{20}$ environ de la longueur l . Par conséquent, pour les pièces dont la longueur est au-dessous de 20 fois l'épaisseur, c'est-à-dire, dans la plupart des cas de la pratique, la résistance ne doit pas être déterminée par la formule précédente, mais par la considération du poids qui pourrait écraser la pièce.

Le poids capable d'écraser ou de comprimer une pièce dont la longueur est égale à une ou deux fois l'épaisseur, peut être évalué, par chaque millimètre carré de la section transversale, à

3,⁴⁹ pour le bois de chêne et de sapin,
40 fer forgé,
100 fer fondu.

On conclut des expériences rapportées (N^o 38 et suivantes) que, quant à la flexion,

1^o pour le bois, l'évaluation ci-dessus doit être réduite aux $\frac{2}{3}$, lorsque la longueur de la pièce est égale à 12 fois l'épaisseur, et à moitié, quand cette longueur est égale à 24 fois l'épaisseur;

2^o pour le fer forgé, l'évaluation ci-dessus doit être réduite aux $\frac{2}{3}$, quand la longueur est égale à 12 fois l'épaisseur, et à moitié, quand la longueur est égale à 24 fois l'épaisseur;

3^e, pour le fer fondu, l'évaluation ci-dessus doit être réduite aux $\frac{2}{3}$ à peu près, quand la longueur est égale à 4 fois l'épaisseur; à moitié environ, quand la longueur est égale à 8 fois l'épaisseur et à $\frac{1}{3}$, lorsque la longueur est égale à 36 fois l'épaisseur.

Les expériences connues ne fournissent pas le moyen d'évaluer avec exactitude la résistance dans les cas intermédiaires, différents de ceux qu'on vient de spécifier.

Quant aux pièces dont la longueur surpasserait 20 fois environ l'épaisseur, on peut en évaluer la résistance par les formules du 76^e 80, avec la certitude que cette évaluation n'excèdera pas les résultats donnés par les expériences.

Lorsque dans les applications on aura évalué, conformément aux principes précédents, la résistance d'un solide chargé verticalement et susceptible, on pourra pour en conclure le plus grand poids dont ce solide puisse être chargé avec sécurité dans les constructions, réduire les résultats à $\frac{1}{10}$ environ, pour le bois, à $\frac{1}{6}$ ou à $\frac{1}{5}$ pour le fer forgé ou fondu.

107). La limite des efforts auxquels un solide susceptible de fléchir peut être exposé dans les constructions, doit être déterminée par la condition que la flexion produite par ces efforts et les allongements ou accourcissements des fibres longitudinales, qui en résultent, ne soient pas capables d'altérer la constitution physique du solide; en sorte que ce solide, étant déchargé, reprenne sa figure naturelle et que sa courbure n'augmente pas avec le temps.

Nous désignerons par B' le plus grand effort que l'on doit se faire supporter aux fibres longitudinales d'un corps, sur l'unité superficielle, et par λ l'allongement ou l'accourcissement des fibres, qui répond à cet effort, la proportion $1 : \lambda :: A : B'$, donnera $B' = A\lambda$.

108). Il n'existe pas d'expériences spéciales qui fassent connaître avec certitude, pour le bois, la limite dont il s'agit. D'après les résultats consignés (76^e 76) la valeur moyenne de la constante B , pour le bois de chêne, est à peu près $B = 6\,000\,000$. L'expérience des constructions apprend que, l'on ne doit pas faire supporter aux bois des charges qui surpassent $\frac{1}{10}$ de celles qui causeraient la rupture (Bouddet, tome IV, page 83); on aura donc, pour le bois de chêne, $B' = 600\,000$. On calculera, dans chaque cas, les plus grands charges auxquelles une pièce puisse être exposée, en

Limite des efforts relativement à la flexion transversale.

Bois.

mettant cette valeur de B' au lieu de celle de B , dans les formules des N^{os} 59 à 68, relatives à la rupture.

Si conformément aux expériences (N^o 72), on suppose $A = 1\,000\,000\,000$,^{kg} pour le bois de chêne, une charge de $600\,000$ ^{kg} produira dans la longueur des fibres une variation $\lambda = 0,0006$, et cette variation devrait être regardée comme la plus grande qu'il fût possible de produire, sans altérer l'élasticité naturelle de ce bois.

La force du sapin jaune ou rouge est au moins égale à celle du chêne: celle du sapin blanc est un peu moindre.

Fer forgé.

109). En supposant conformément au N^o 106, que la limite des flexions qu'on laissera prendre aux pièces, est déterminée par la condition que l'extension des fibres soit due seulement à une charge de 10 ^{kg} par millimètre carré, on devra prendre, pour le fer forgé, $B' = 10\,000\,000$ et calculer les plus grandes charges à faire supporter aux pièces, par les formules des N^{os} 59 à 68, relatives à la rupture, en mettant à la place de B , cette valeur de B' .

On a pour le fer forgé, $A = 20\,000\,000\,000$ ^{kg} (N^o 73); par conséquent la charge de $10\,000\,000$ ^{kg} occasionne dans les fibres une variation λ de longueur, exprimée par $0,0005$ que l'on regarde ici comme la limite de celles que l'on peut produire, sans altérer la constitution du fer. M^r Duhamel (Eclaircissement, page 79) a pris $\lambda = 0,0003$, fraction qui répond aux moindres valeurs indiquées par ses expériences et dont la moyenne est à peu près $0,0005$. Ce dernier allongement serait produit par une charge de 13 ^{kg} par millimètre carré, égale à $\frac{1}{3}$ de celle qui causerait la rupture (N^o 106).

Fer fondu.

110). Suivant les expériences rapportées (N^o 77), la valeur de B , qui convient à la fonte de bonne qualité est moyennement $B = 28\,000\,000$ ^{kg}. On peut charger les pièces jusqu'à $\frac{1}{3}$ du poids qui causerait la rupture, on prendra $B' = 7\,000\,000$ ^{kg}. Les plus grandes charges auxquelles il soit possible de soumettre les pièces en fer fondu, se calculeront pareillement par les formules des N^{os} 59 à 68, relatives à la rupture et dans lesquelles on remplacera B , par cette valeur de B' .

Supposé que l'on ait, pour la fonte douce, conformément aux expériences consignées (N^o 75), $A = 11\,000\,000\,000$ ^{kg}, une tension de $7\,000\,000$ ^{kg} répondra à un allongement $\lambda = 0,0006$, que l'on regarde ici comme la limite de ceux auxquels on peut exposer le fer fondu sans en altérer la constitution.

l'expression de la limite des efforts, et quand leur direction est perpendiculaire à la longueur du solide.

111). Le solide étant posé horizontalement sur deux appuis et chargé au milieu, l'équation de l'équilibre de résistance à la rupture (N^o 89) est $\beta = cP$. Supposons que la section transversale soit rectangulaire, nous aurons $\beta = B \frac{ab^2}{6}$ et l'équation d'équilibre donnera $cP = B \frac{ab^2}{6c}$; maintenant, si l'on substitue B' ou $A\lambda$ à B , il viendra

$$cP = A \frac{\lambda ab^2}{6c} \dots \dots \dots (1)$$

c'est l'expression de la limite des poids dont on peut charger le solide, sans que son élasticité soit altérée.

En prenant avec M^r Duhamel, pour le fer forgé,

$A = 20\ 000\ 000\ 000$, $\lambda = 0,0003$, on trouve

$$cP = 2\ 000\ 000 \frac{ab^2}{c} \dots \dots \dots (2)$$

résultat qui coïncide avec celui que cet auteur a donné (Essai théorique N^o page 79).

112). Quand le corps dirigé est tendu ou comprimé, nous avons la longueur du solide.

112). Mais quand le solide est soumis à un effort dirigé en tout ou en partie suivant sa longueur, l'expression de la limite ne peut plus se conclure exactement de l'équation d'équilibre et doit être déterminée directement, comme nous allons l'expliquer.

On remarquera qu'en général 1^o on verra de la compression X de l'effort, les fibres sont d'abord comprimées ou allongées également sur toute l'étendue de la section transversale; 2^o par l'effet de la courbure la compression se trouve considérablement diminuée à la face convexe et augmentée à la face concave. Alors on pourra régler la flèche de courbure et par suite l'effort, d'après la condition que la plus grande compression ou extension n'excède pas la limite λ .

Cas où le solide est chargé de bout;

113). Considérons un solide chargé de bout; soit O l'aire de la section transversale; $\frac{Q}{AO}$ exprimera évidemment la compression commune à toutes les fibres; d'ailleurs $\frac{y}{3}$ ou $-\frac{a^2 y}{2x}$ exprime, pour un point quelconque, la plus grande compression des fibres due à la flexion (N^o 40). Or (N^o 80), le maximum de cette quantité, lequel répond au point dont l'abscisse

$$x = \frac{1}{2}c \text{ ou dont l'ordonnée } y = f, \text{ est } \frac{y}{\alpha} Q f \text{ ou } \sqrt{Q} \frac{\sqrt{f}}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\lambda y^2}{Q s^2}},$$

$$\text{à cause de } k=1. \text{ Or si } Q \left(\frac{1}{AO} + \frac{\sqrt{s} \sqrt{f}}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\lambda y^2}{Q s^2}} \right) = \lambda, \text{ exprime}$$

le plus grand accourcissement des fibres; si donc on veut que le plus grand effort supporté par les fibres, sur l'unité superficielle, n'excède pas la limite B' , il faudra que la valeur de Q ne surpasse point celle qui satisfait à l'équation

$$Q \left(\frac{1}{0} + \frac{A \sqrt{s} \sqrt{2}}{A' \pi} \sqrt{1 - \frac{A \pi^2}{Q s^2}} \right) = B' \dots \dots (1)$$

dans laquelle on attribuera à B' les valeurs indiquées dans les trois numéros précédents, pour les divers matériaux.

Lorsque la section transversale du solide sera rectangulaire, on aura $\lambda = A \frac{a b^3}{12}$, $0 = a b$, $v = \frac{b}{2}$ et l'équation deviendra

$$\frac{Q}{a b} \left(1 + \frac{12 s}{\pi^2 b^2} \sqrt{1 - A \frac{\pi^2 a b^3}{12 Q s^2}} \right) = B' \dots \dots (2)$$

Cas où il est chargé obliquement à la longueur

114). Les mêmes considérations s'appliquent au cas de résistance, traité (N°. 89).

Dans ce cas, $\frac{Q \cos \epsilon}{A \cdot 0}$ sera l'accourcissement des fibres, provenant de l'action de la composante $Q \cos \epsilon$, parallèle à l'axe

du solide, et $\frac{v Q \sin \epsilon \text{ tang. } c \sqrt{\frac{Q \cos \epsilon}{A}}}{\sqrt{\lambda Q \cos \epsilon}}$, le plus grand accourcissement produit par la flexion, de là

$$Q \left(\frac{\cos \epsilon}{0} + \frac{A v \sin \epsilon \text{ tang. } c \sqrt{\frac{Q \cos \epsilon}{A}}}{\sqrt{\lambda Q \cos \epsilon}} \right) = B' \dots \dots (3)$$

et

$$\frac{Q}{a b^3} \left(b + \frac{6 \sin \epsilon \text{ tang. } c \sqrt{\frac{12 Q \cos \epsilon}{A a b^3}}}{\sqrt{\frac{12 Q \cos \epsilon}{A a b^3}}} \right) = B' \dots \dots (4)$$

Cas de la torsion.

115). La formule (10) du N°. 97 donne $\frac{T \theta}{C} = \frac{P}{A'} \frac{2 L}{\pi r^3}$; or, le premier membre de cette égalité exprime la quantité de torsion, par unité de longueur, qu'éprouve une fibre placée à la surface du cylindre; écrivait donc T , au lieu de $\frac{T \theta}{C}$, nous aurons

$$T = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi A' T}} \sqrt[3]{L P} \dots \dots (1)$$

Les Ingénieurs Anglais font usage pour le fer forgé d'une formule fondée sur l'observation et qui revient à

$$T = 0,0106612 \sqrt[3]{L P} \dots \dots (2)$$

en la comparant avec la précédente, après y avoir mis pour A' la valeur (N°. 98), on trouve $T = 0,00008$, ce qui change (1) dans la formule pratique

$$T = 0,010632 \sqrt[3]{L P} \dots \dots (3)$$

Quoi qu'il en soit, on a généralement $T = K \sqrt[3]{L P}$, K étant un coefficient constant. Pour un cylindre de même matière, soumis à un autre effort $L' P'$ et dont le rayon serait r' , on aura pareillement $T' = K \sqrt[3]{L' P'}$, d'où

$$\sqrt[3]{LP} : \sqrt[3]{LP'} :: r : r'.$$

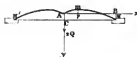
Observation Générale.

116). Nous sommes heureusement parvenus à perfectionner dans quelques uns de ses points essentiels, la théorie élémentaire de la résistance des solides, que nous venons d'exposer, et nous avons choisi l'ordre didactique qui nous a paru le plus propre à l'abréger sans l'obscurcir. (L'appendice) et les notes que nous y avons ajoutés sont destinés à la compléter et à en développer plusieurs articles. Dans ce travail, il est juste de le dire, nous avons beaucoup emprunté à M. Navier que nous nous sommes plus à prendre pour guide et souvent pour modèle.

Théorie de la résistance des Solides.

Appendice.

Solide boudé entre deux appuis et chargé d'un poids au son milieu.



177). Un solide pouté entre deux appuis M, M' de niveau, dont la distance est un peu moindre que sa longueur et qui les tiennent courbés, de sorte que sa convexité soit tournée par en haut, et ensuite chargé d'un poids $2Q$ au son milieu A .

Il est clair que chaque moitié est dans le même état que si étant encastrée en A elle était sollicitée en M ou M' , par une certaine force dont la composante verticale est Q . Oint en déclinant par X , la composante horizontale de l'effort exercé contre les appuis; par c la moitié de leur intervalle MM' , par s la demi-longueur AM du solide et par f l'ordonnée extrême BM , nous aurons $\Delta \frac{dy}{dx} = -Q(c-x) + X(f-y)$, et en faisant, pour abréger, $\frac{Q}{\Delta} = p$, $\frac{X}{\Delta} = q$, puis intégrant,

$$f-y = E \sin. q(x+F) + \frac{p^2}{q^2}(c-x) \dots \dots \dots (1)$$

or, on doit avoir, au point A , $x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=0$; et au point M , $x=c, y=f$; d'où résulte

$$f = E \sin. qF + \frac{p^2}{q^2}c, \quad 0 = qE \cos qF - \frac{p^2}{q^2}c, \quad 0 = \sin. q(c+F),$$

c'est-à-dire,

$$q(c+F) = k\pi, \quad E = -\frac{p^2}{q^2 \cos qc} \text{ et } \tan qc = qc - \frac{q^2 f}{p^2};$$

Il s'en suit

$$f = \frac{p^2}{q^2}(qc - \tan qc) \dots (2), \quad y = \frac{p^2}{q^2} \left(qx - \frac{\sin qc - \sin. q(c-x)}{\cos qc} \right) \dots (3)$$

d'où pour peu près

$$s = c + \frac{p^2 c}{4q^2} \left(3 - \frac{5 \tan qc}{qc} + \tan^2 qc \right) \dots (4) \quad s = c + \frac{p^2 c^3}{4q^2} + \left(\frac{3p^2}{4q^2} - \frac{p^2 c^2}{2} \right) f \dots (5)$$

Oint la force X doit satisfaire à la condition que l'arc $c\sqrt{\frac{X}{\Delta}}$, surpassé la tangente, de la quantité $f\sqrt{\frac{X}{\Delta}}$, laquelle doit être fort petite, parce que la courbure du solide est supposée très-légère.

Représentons par $\alpha, \beta, \beta', \beta'' \dots$ la suite des arcs égaux en longueur à leurs tangentes; on satisfera à la condition, en donnant à la force X , une valeur un peu moindre que les nombres $\Delta \frac{\alpha^2}{c^2}, \Delta \frac{\beta^2}{c^2}, \Delta \frac{\beta'^2}{c^2} \dots$ Il naîtra de ces suppositions des courbes qui offriront un nombre plus ou moins grand de points d'inflexion.

La première valeur résout la question proposée; les équations (2) et (4) feront connaître X et f , lorsque c, s et Q seront donnés.

Si l'on suppose $f=0$, les équations (2) et (4) donneront $\tan qc = qc, s=c + \frac{p^2 c^3}{4q^2}$; d'où $X = \beta^2 \frac{\Delta}{c^2} = (4,6936) \frac{\Delta}{c^2}$ et $x = \frac{Q^2}{4\Delta} - \frac{c^2}{s-c}$ ou



$2Q = \frac{4\delta a}{c^2} \sqrt{\frac{s-c}{c}}$; expression du poids $2Q$, qui agissant en A abaisse-
rait ce point au niveau des appuis et doit être regardé comme le
plus grand que le solide puisse supporter. Car si l'on supposait le
point A abaissé au dessous de C, et que l'on complât les y possi-
bles de bas en haut, le signe de Q , dans l'équation d'équilibre,
changerait et l'on retomberait sur les résultats du N° 89; on
sait que la force X devrait être supposée un peu plus grande
que 0, $\Delta \frac{Q^2}{c^2}$, $\Delta \frac{Q^2}{c^2}$... suppositions dont la première doit
être admise ici et d'où il résulte que la force X , et le poids
 $2Q$ prendront des valeurs beaucoup moindres que celles qu'ils
avaient quand le point A était au-dessus de l'horizontale MM'.
La courbe ne présente plus de point d'inflexion et tourne sa concavité
par en bas,

Les résultats précédents expliquent le surcroît de résistance qu'un
solide acquiert, lorsque, ayant été courbé, les extrémités sont placées
entre deux obstacles qui ne peuvent être écartés. Cette résistance a une
limite qui ne peut être dépassée tant que le solide ne change aucune
de figures. Après ce changement le solide ne peut plus supporter
qu'un poids beaucoup plus petit et même plus petit que celui qu'il
supporterait, à courbure égale, si les extrémités étaient simplement
posées sur des appuis.

De la résistance des Solides dont l'axe est courbe.

Solides naturellement incurvés, chargés de divers manières.

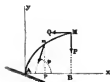
118). Il s'agit maintenant de solides dont la figure naturelle
est courbe, tels que les arcs en bois ou en fer, employés à la con-
struction des ponts.

Deux cas se présentent: ou la figure de la courbe et la dis-
tribution de la charge ont une telle relation que le solide se
trouve simplement comprimé ou étendu et n'a aucune tendance
à changer de figure; ou bien le solide tend à fléchir par
l'action des poids dont il est chargé.

De la courbe d'équilibre, relative
à une distribution donnée de la
charge.

119). Proposons-nous d'abord de déterminer la courbe d'équi-
libre, c'est-à-dire, la courbe suivant laquelle le solide devrait
être tracé, pour qu'il ne tendît point à fléchir sous une charge
dont la loi de distribution est connue.

Supposons que la courbe AM, à chaque point de laquelle est
appliquée une force dirigée dans son plan, soit la figure natu-
relle du solide; il est clair que cette courbe n'aura aucune
tendance à fléchir, si la résultante des forces qui sollicitent
la partie quelconque m M, est dirigée suivant la tangente



au point m , ou, ce qui revient au même, s'il y a équilibre entre ces forces et la pression, prise en tout contraire, qui en naît au point m , suivant la tangente; bien entendu que l'extrémité A s'appuie contre un plan fixe, normal à la courbe.

Désignons par a et b les coordonnées du point extrême M ; par s la longueur de l'arc Am ; par S la longueur totale AM ; par ρ le rayon de courbure au point m ; par ϕ l'angle que la tangente de la courbe, à l'origine A , fait avec l'axe horizontal Ax ; par F la valeur de la force appliquée au point m , valeur rapportée à l'unité de longueur de la courbe et donnée en fonction de l'arc s ; par φ l'angle que la direction de la force F forme avec l'axe Ax ; par T la pression exercée au point m , dans le sens de la courbe; enfin par P et Q les forces verticale et horizontale appliquées au point extrême M .

Or, les composantes verticale et horizontale de la pression T sont respectivement $T \frac{dy}{ds}$, $T \frac{dx}{ds}$, et pareillement les sommes des composantes verticales et horizontales des forces appliquées à la partie mM , sont respectivement $\int_s^S ds F \sin \varphi$, $\int_s^S ds F \cos \varphi$;

la première condition de l'équilibre sera donc

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds F \sin \varphi, \quad T \frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds F \cos \varphi. \dots (i).$$

Mais elle comprendra implicitement la seconde, qui concerne les moments; puisque si, pour chaque point m , la résultante des forces appliquées à la partie mM , est parallèle à la tangente en m , toutes les résultantes sont tangentes à une courbe parallèle à AmM et qui passant aussi par le point M , se confond avec AmM (Coulomb, Mémoire cité, §XVII, remarque I). Ainsi les conditions de l'équilibre sont complètement exprimées par les équations (i).

Ajoutons les différentielles de ces équations, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$, et, observant que...

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1; \text{ d'où } \frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} = 0, \text{ nous trouverons}$$

$$-dT = F ds \left(\frac{dy}{ds} \sin \varphi + \frac{dx}{ds} \cos \varphi \right). \dots (K)$$

équation dans laquelle dT et ds doivent être de signes contraires, parce que T diminue quand s augmente, et qui donnera la valeur de la pression exercée suivant la longueur du solide.

La charge est posée normale à la courbe.

120). Par exemple, si les forces appliquées au solide sont partout normales à la courbe, on a $\sin \varphi = \frac{dx}{ds}$, $\cos \varphi = -\frac{dy}{ds}$; l'équation (K) se réduit à $dT = 0$, on voit que la pression est

constante. Il viendra donc par la différenciation des équations (2), $T d \frac{dy}{ds} = -F ds \sin \varphi$, $T d \frac{dx}{ds} = -F ds \cos \varphi$; d'où et en regard aux différentielles des valeurs de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, $T d \varphi = -F ds$ et, parce que $d \varphi = \frac{ds}{r}$,

$$\frac{1}{r} = -\frac{T}{F} \text{ ou } T = -\frac{F}{r} \dots \dots \dots (2)$$

c'est-à-dire que le rayon de courbure doit être partout égal à la pression divisée par la valeur de la force normale, rapportée à l'unité de longueur.

Si la force normale était constante, la figure de la courbe devrait être un arc de cercle.

La charge est partout verticale;

121). Par exemple encore, si la force F est partout verticale, les équations (1) et (2) deviennent

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^s F ds, T \frac{dx}{ds} = Q, -dT = F ds \frac{dy}{ds} \dots \dots (2)$$

ou, quand F sera donnée en fonction de l'abscisse,

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_x^x F dx, T \frac{dx}{ds} = Q, -dT = F dx \frac{dy}{ds} \dots \dots (3)$$

La composante horizontale de la pression T est constante et égale à Q .

Et de plus égale pour des abscisses égales.

122). Le cas le plus simple est celui où F a une valeur constante p , c'est-à-dire, où le solide est chargé de poids égaux pour des parties égales de l'axe des abscisses. On a alors

$$T \frac{dy}{ds} = P + p(a-x), T \frac{dx}{ds} = Q; \frac{dy}{dx} = \frac{P + p(a-x)}{Q}, y = \frac{1}{Q} \left[Px + p(ax - \frac{1}{2}x^2) \right] \dots (4)$$

$$T = Q \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \dots \dots \dots (5)$$

On pourra se donner, outre la position du point extrême M , soit l'ordonnée $DN = NG + GD = g + \frac{1}{2}b$, qui répond à $x = \frac{1}{2}a$, soit l'abscisse $AC = a'$, ou l'ordonnée $CO = b'$ du sommet O , pour lequel $\frac{dy}{dx} = 0$; et l'on trouvera facilement les valeurs de $P, Q, \tan \theta$, l'équation de la courbe et l'expression générale de T , qu'on appliquera ensuite aux points particuliers A et M .

123). Si la courbe étant appuyée au point A contre un plan vertical, la tangente en ce point doit se confondre avec l'axe horizontal Ax ; le sens des y positifs sera changé, et comme on aura $\frac{dy}{dx} = 0, y = 0$, pour $x = 0$, puis $y = b$, pour $x = a$, il viendra

$$P = -pa, Q = \frac{pa^2}{2b}, y = \frac{bx^2}{a^2}, T = \frac{pa^2}{2b} \sqrt{1 + \frac{4bx^2}{a^4}} \dots \dots (6)$$

et au point extrême M ,

$$\tan \theta = \frac{2b}{a}, T = \frac{pa^2}{2b} \sqrt{a^2 + 4b^2} \dots \dots (7)$$



La courbe s'appuie par une extrémité contre un plan vertical.



La courbe est contenue entre deux appuis horizontaux.

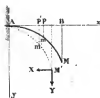


(14). On peut évidemment remplacer le point fixe A, par une autre portion de courbe, AM' , égale à la première et chargée de même.

Il suit de là qu'un solide courbe MM' , pris sur deux appuis par ses extrémités M, M' et chargé uniformément par rapport à l'horizontale MM' , doit avoir la figure de la parabole ordinaire, $y = \frac{Fx^2}{2a}$, pour qu'il ne tende point à fléchir sous la charge. Les valeurs de P et Q seront les efforts verticaux, supportés par les deux appuis; l'expression de T donnera la pression en un point quelconque de la courbe, pression qui sera Q au sommet de la courbe.

Enfin, si l'on supposait la charge uniformément distribuée sur la longueur de la courbe elle-même, la figure propre à l'équilibre serait celle de la courbe connue sous le nom de chaînette.

De la flexion des solides courbes.



(15). Considérons maintenant un solide courbe Amm' , encastré horizontalement à l'extrémité A, et à l'autre extrémité M duquel sont appliquées les deux forces verticale et horizontale Y, X qui le maintiennent fléchi suivant la nouvelle courbe Amm' ; il s'agit de déterminer les circonstances de cette flexion.

Désignons par a, b et a', b' les coordonnées du point extrême M et du point M' dans lequel il se transporte et de même par xy et $x'y'$ les coordonnées du point quelconque m et de son analogue m'; par s la longueur de l'arc Am; par φ, φ' les angles que forment avec la verticale les normales en m, m', aux deux courbes.

Les raisonnements du 15.49, s'appliqueront ici: v indiquant encore la distance d'un point de la section transversale du solide à l'axe d'équilibre, il est clair, d'une part, que l'élément de fibre, qui répond à ce point, avait avant la flexion une longueur $ds + v d\varphi$, puisque $d\varphi$ est l'angle de deux normales consécutives; d'autre part, qu'après la flexion et abstraction faite de la variation qui peut être survenue dans la longueur de l'arc élémentaire ds , cette longueur devient $ds + v d\varphi'$; on voit que la proportion suivant laquelle l'élément de fibre a été allongé est $\frac{v(d\varphi' - d\varphi)}{ds + v d\varphi}$ ou simplement $\frac{v(d\varphi' - d\varphi)}{ds}$; parce qu'en général l'épaisseur des solides étant fort petite par rapport au rayon de courbure, la quantité $v d\varphi$ qui revient à $\frac{v ds}{\rho}$, est comme infiniment petite en comparaison de ds .

On passera donc de l'équation d'équilibre d'un solide droit,

à celle d'un solide courbe, en écrivant dans la première $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, à la place de $\frac{1}{r}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$; d'où résulte immédiatement (N^o. 45)

$$\frac{d}{ds} \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = X(b-y) + Y(a-x) \dots \dots \dots (j)$$

et en intégrant

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{a} \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} [X(b-y) + Y(a-x)].$$

Par hypothèse, la flexion du solide ne cessant jamais d'être fort petite, les angles φ' et φ diffèrent très-peu l'un de l'autre, et le second membre de l'équation précédente, peut être regardé comme un angle extrêmement petit, égal à son sinus et dont le cosinus est l'unité. En conséquence, cette équation donnera

$$\cos \varphi' - \cos \varphi = -\frac{1}{a} \sin \varphi \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} [X(b-y) + Y(a-x)], \sin \varphi' - \sin \varphi = \frac{1}{a} \cos \varphi \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} [X(b-y) + Y(a-x)];$$

Mais, supposez toujours que les fibres du solide ne changent pas de longueur en fléchissant, on a $\cos \varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$, $\cos \varphi' = \frac{dx'}{ds}$, $\sin \varphi' = \frac{dy'}{ds}$; donc

$$dx' - dx = -\frac{1}{a} dy \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} [X(b-y) + Y(a-x)]; \quad dy' - dy = \frac{1}{a} dx \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} [X(b-y) + Y(a-x)] \dots (l)$$

équations qui intégrées feront connaître le déplacement de chacun des points du solide, quand la figure primitive sera donnée.

Dans les applications, à cause du peu d'amplitude de la courbe du solide, on pourra presque toujours se borner au deuxième terme du développement du radical et l'on ne commettrait même le plus souvent que de légères erreurs en négligeant ce terme.

Les fibres du solide que nous considérons sont tendues, suivant sa longueur, par l'action de la force Y et comprimées par l'action de la force X . La tension ou compression produite par l'une de ces forces, en un point quelconque de la courbe, équivaut à cette force décomposée parallèlement à la tangente en ce point. Or, si T désignant, comme on l'a déjà supposé, une pression, on aura $T = -Y \frac{dy}{ds} + X \frac{dx}{ds}$, ou

$$T = \frac{-Y \frac{dy}{dx} + X}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} \dots \dots \dots (m)$$

Solide parabolique, chargé à son sommet, et dont les deux extrémités sont sur un plan horizontal.



126). Considérons un solide MAM' de figure parabolique, posé sur un plan horizontal MM' , et chargé à son sommet A d'un poids R .

Le solide cèdera à l'action du poids et son sommet s'abaissera au même point que ses extrémités s'écartent l'une de l'autre; mais chaque moitié AM ou AM' sera dans le même état que si étant encastrée horizontalement en A , elle était sollicitée à l'extrémité M ou M' par une seule force verticale R , agissant de bas en haut. Nous aurons en conséquence $y = \frac{bx^2}{a}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a}$, $Y = -R$, $X = 0$. Si, après avoir développé le radical dans les équations (1), on se borne au second terme, on intègre et que l'on substitue les valeurs précédentes, on aura les expressions de $x'-x$ et $y'-y$; désignant ensuite par f la quantité dont le point A s'abaisse, par h celle dont le point M ou M' se déplace horizontalement et faisant $x = a$, on trouvera

$$h = \frac{R}{a} \left(\frac{5a^2b}{8} + \frac{b^2}{10} \right), \quad -f = \frac{R}{a} \left(\frac{a^3}{8} + \frac{ab^2}{15} \right) \dots (1)$$

L'abaissement du sommet est un peu plus grand qu'il ne serait pour un solide rectiligne, à égalité de distances des appuis.

La formule (m) donne à fort peu près

$$T = R \frac{5bx}{a^2} \left(1 - \frac{5b}{a} \frac{x}{a} \right) \dots (2)$$

et parce que b est supposé petit on comparait a , la plus grande valeur de T répondra aux points extrêmes M et M' , où $x = a$.

Les deux extrémités du solide sont retenues par les appuis.



127). Supposons que les appuis ne permettent pas aux extrémités M et M' de s'écarter l'une de l'autre. La résistance horizontale des appuis, représentée par X , se déterminera d'après la condition que les points M, M' , n'éprouvent pas de déplacement horizontal; faisant donc $h = 0$ dans les intégrales indiquées ci-dessus et qui ont donné les résultats (1), on obtient

$$X = R \left(\frac{35a}{32b} - \frac{b}{15a} \right), \quad f = -\frac{R}{a} \left(\frac{a^3}{128} - \frac{13ab^2}{675} \right) \dots (3)$$

C'est-à-dire que l'abaissement du sommet, quand la courbe a peu d'amplitude, est à peu près indépendant de la flèche b de cette courbe et on le comparant à la valeur (1) de f (N. 62), on voit qu'il n'est pas $\frac{1}{80}$ de celui que subirait un solide rectiligne des mêmes dimensions; mais il faut se souvenir que le calcul précédent ne tient pas compte de la contraction que doit produire la pression exercée suivant la longueur, et qui

contribue avec la flexion à déprimer le sommet de la courbe.

La formule (m), à cause de $Y = -R$; $X = R \left(\frac{15a}{32b} - \frac{b}{15a} \right)$ et de la suppression des termes d'ordres supérieurs à $\frac{b}{a^2}$, donne

$$T = R \left(\frac{15a}{32b} - \frac{b}{15a} + \frac{15b}{a^2} - \frac{15b^2}{16a^3} \right) \dots \dots \dots (4)$$

expression dont la plus grande valeur répondant à $x = \frac{16a}{25}$ est

$$T = R \left(\frac{15a}{32b} + \frac{415b}{700a} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Manière d'avoir égard au poids
du solide.

128). Si le solide considéré (N^o 125), au lieu d'être sollicité par les forces X et Y , était chargé de poids distribués uniformément par rapport à l'axe Ax , on aurait (N^o 60 et 125) l'équation

$$A \frac{d\varphi - d\varphi}{ds} = \int_x^a p(u-x) du \dots \dots \dots (n)$$

d'où proviendrait les analogues des équations (1). D'un autre côté, la pression exercée au point m serait égale à la somme des poids qui chargent la partie mM , décomposés parallèlement à la tangente en m ; de là

$$T = - \frac{dy}{ds} \int_x^a p du \dots \dots \dots (o)$$

Introduisant ensuite des forces X, Y appliquées à l'extrémité M , on pourra revenir au solide considéré (N^o 127) et le regarder ou comme chargé seulement du poids $2pa$, réparti uniformément sur l'intervalle MM' , ou comme chargé à la fois de ce poids $2pa$ et du poids $2R$ suspendu au sommet A . Dans le premier de ces deux cas, la figure supposée au solide étant celle qui convient à l'équilibre, on trouve $X = \frac{pa^2}{15b}$, $f = 0$, résultats conformes à ceux des N^o 123 et 124. Dans le second cas, la valeur de X sera la somme de la précédente et de celle que nous avons trouvée (N^o 127; pareillement la valeur de T sera la somme des valeurs indiquées (N^o 122 et 127).

Les indications que nous donnons paraissent suffisantes; d'ailleurs, on trouvera dans l'ouvrage de M^{re} Xavier, les développements que nous omettons, pour ne pas dépasser les bornes qui nous sont prescrites.

Des variations produites dans la longueur des solides courbes par les actions exercées suivant cette longueur, et des changements de figure qu'en proviennent.

Expression générale de la variation
produite dans la longueur des solides courbes,
par l'action exercée suivant cette
longueur.

129). Dans les questions précédentes nous avons déterminé les valeurs des actions exercées suivant la longueur des

éléments des solides courbes. Ces actions occasionnent dans la longueur de ces éléments une variation dont nous avons fait abstraction, mais qui concourt avec la flexibilité du solide à en changer la figure. Comme il ne s'agit ici que de changements très-petits, on pourra les considérer successivement, calculer à part l'effet de chacun d'eux et prendre la somme des résultats obtenus.

Conservons les notations du N^o. 125 et nommons s' la longueur de l'arc Am' , laquelle est maintenant différente de celle de l'arc Am ; l'élément qui répond au point m sera raccourci de la quantité $ds - ds'$, par l'action exercée dans le sens de cet élément, et $\frac{ds - ds'}{ds}$ exprimera la proportion de cet raccourcissement. Si donc T désignant toujours la pression exercée au point m dans le sens de la longueur du solide, nous représentons par O l'aire de la section transversale, nous aurons $AO \frac{ds - ds'}{ds} = T$; d'où

$$s - s' = \frac{1}{AO} \int dx T \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \dots \dots \dots (P)$$

équation qui détermine la variation de longueur des parties du solide courbe. La figure de ce solide demeurant d'ailleurs à très-peu près la même, il sera facile d'en conclure les déplacements que les points éprouveront par l'effet de cette variation.

Applications.

130. Reprenant, par exemple, le solide considéré (N^o. 127), remplaçons $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{2bx}{a}$ et T par sa valeur (4), dans l'équation (P), et faisons le développement du radical aux termes de l'ordre de $\frac{b^2}{a^2}$, l'intégration donnera $s - s' = \frac{R}{AO} \left(\frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{32a} + \frac{5bx^3}{a^3} \right)$. Cela posé, soit c la demi-longueur primitive AM et c' la demi-longueur variée AM' ; comme on a en même temps $s = c$, $s' = c'$ et $x = a$, il viendra

$$c - c' = \frac{R}{AO} \frac{25a^2}{32b} \left(1 + \frac{25b^2}{175a^2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Si, de même qu'au N^o. 124, le solide, toujours de figure parabolique, était chargé du poids $2pa$, réparti sur sa longueur, on mettrait pour T la valeur (6) du N^o. 123, dans l'équation (P), qui donnerait

$$c - c' = \frac{P}{AO} \frac{a^3}{16b} \left(1 + \frac{4b^2}{3a^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Enfin, si, comme on l'a indiqué N^o. 128, le solide est chargé à la fois du poids $2pa$ réparti sur sa longueur et du poids $2R$ suspendu à son sommet, l'accourcissement sera la somme

des précédents (1) et (2)

Détermination des changements de figure, produits par la variation de longueur.

(31). Quant à l'abaîssement du sommet de la courbe, résultant de la variation de longueur, il se calculera comme nous allons l'expliquer pour le solide parabolique.

La rectification de la parabole conduit à

$$c = a \left[1 + \frac{1}{5.2} \left(\frac{2b}{a} \right)^2 - \frac{1}{5.8} \left(\frac{2b}{a} \right)^4 + \frac{1}{7.16} \left(\frac{2b}{a} \right)^6 - \frac{1}{6} \right];$$

d'où l'on conclut, par la méthode inverse des séries,

$$\left(\frac{2b}{a} \right)^2 = 6 \left[\frac{c-a}{a} + \frac{9}{10} \left(\frac{c-a}{a} \right)^2 - \frac{54}{175} \left(\frac{c-a}{a} \right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{c-a}{a} \right)^4 \right],$$

et on différencie

$$\frac{db}{dc} = \frac{3a}{4b} \left[1 + \frac{2.9}{10} \frac{c-a}{a} - \frac{3.54}{175} \left(\frac{c-a}{a} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{c-a}{a} \right)^3 \right]$$

Il s'en suit que si $c-c'$ est une petite variation de la demi-longueur c et $b-b'$ la variation relative de la fleche b , on a à fort peu près, on se bornant toujours aux termes de l'ordre de $\frac{b^2}{a^2}$,

$$b-b' = \frac{3a}{4b} (c-c') \dots \dots \dots (3)$$

Résultats de quelques expériences sur la résistance des solides courbés.

(32). D'après les expériences de M. Duveau (Essai théorique, page 64) une pièce de fer forgé, ayant 0^m,06 de largeur et 0^m,08 de hauteur, a été courbée à froid suivant un arc de cercle de 6^m,32 de corde et 0^m,7 de fleche. Cette pièce étant posée verticalement entre deux appuis qui ne permettaient pas aux extrémités de s'écarter, l'action de son propre poids n'en changeait pas sensiblement la figure.

La fleche de l'arc étant de 0^m,709 et la pièce étant successivement chargée au milieu de 20, 120, 220, 260 et 280^{kg}, ce point s'est abaissé successivement de 4, 34, 68, 89 et 112 millimètres. La pièce a totalement fléchi sous un poids de 288^{kg}.

Dans une autre expérience, la fleche de l'arc étant de 0^m,694 et la pièce étant successivement chargée au milieu de 50, 100, 150, 200 et 250^{kg}, ce point s'est abaissé successivement de 10, 22, 39, 57 et 92 millimètres. Les poids étant ôtés le sommet de la courbe est resté de 0^m,024 plus bas qu'il n'était avant l'expérience. La pièce a fléchi sous un poids de 270^{kg} qui n'avait pas été placé tout-à-fait au milieu.

La même pièce était près de fléchir sous deux poids de 280 et 285^{kg} placés de chaque côté, à $\frac{1}{6}$ de la longueur, à compter des extrémités.

La même pièce ayant été chargée successivement à $\frac{1}{2}$ de

la longueur, à partir de l'une des extrémités, d'un poids de 20 et de 100^{kg}, et la flèche primitive étant de 9^m 696, le point chargé s'est abaissé de 8 et de 45 millimètres. Le sommet de la courbe s'est d'abord un peu soulevé, puis s'est abaissé quand la charge a atteint 150^{kg}. La pièce a fléchi sous un poids de 177^{kg}.

Des solides formés de plusieurs pièces assujetties entre elles

De la résistance des solides composés; exemples les plus utiles.

(88). Lorsqu'un solide est composé de plusieurs pièces la résistance dont il est capable s'évalue différemment, selon la manière dont ces pièces sont assujetties les unes aux autres. Nous parcourrons les cas les plus remarquables.

Si le solide est l'assemblage de plusieurs pièces superposées, assujetties par des brides qui les retiennent en contact, sans s'opposer à ce que les points correspondants des faces contiguës se déplacent les uns par rapport aux autres, dans la flexion de l'assemblage; la résistance du système sera la somme des résistances que les pièces offriraient séparément.

Supposant donc que la section transversale des pièces soit rectangulaire, désignons par a la largeur commune de ces pièces; par b la hauteur de chacune et par n leur nombre; il est clair (75. 50), qu'abstraction faite du frottement provenant de la force avec laquelle les pièces sont serrées les unes contre les autres, l'expression du moment d'élasticité sera

$$\lambda = nA \frac{ab^3}{12} \dots \dots \dots (1)$$

et celle du moment de rupture,

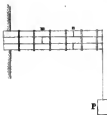
$$\beta = nB \frac{ab^2}{6} \dots \dots \dots (2)$$

La résistance du système est la même soit que l'on superpose les pièces dans le sens de la flexion soit qu'on les place les unes à côté des autres.

Si les pièces assemblées étaient partagées en plusieurs parties dans leur longueur, le moment d'élasticité n'aurait pas la même valeur aux différents points de la longueur du système. Dans la partie $m m$ le moment d'élasticité est la somme des moments des trois pièces superposées; dans la partie $n n$, il est seulement la somme des moments de deux de ces pièces. Il faut, autant qu'il est possible disposer les joints de manière qu'ils ne se trouvent point vis-à-vis les uns des autres; et, sous cette condition, on pourra



regarder la résistance du système à la flexion ou à la rupture, comme égale à la somme des résistances des pièces superposées, moins une.



Quelquefois même, on peut, si les joints sont disposés convenablement, regarder la résistance du système comme égale à la somme des résistances superposées. Par exemple, quand le solide, composé de trois pièces superposées, est encastré à une extrémité et chargé à l'autre, la résistance au point d'encastrement équivaut à la somme des résistances des trois pièces. Deux points m, n que l'on suppose à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{2}{3}$ de la longueur, la résistance est seulement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de la précédente; mais comme l'action du poids pour causer la flexion ou la rupture, en ces points, est également $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de l'action de ce poids au point d'encastrement, l'assemblage offre partout une résistance au moins égale à celle qui s'exerce à ce dernier point. On pourrait évidemment supprimer ici les portions des pièces supérieure et inférieure, qui sont au-delà du point n , sans altérer la résistance du système à la rupture.



La résistance, soit à la flexion soit à la rupture, d'un solide formé de pièces assemblées à crochets ou unies par des clefs que des brides tiennent fortement, ne différera pas sensiblement de celle d'une seule pièce des mêmes dimensions.

Si l'assemblage était formé de deux pièces séparées, mais abuties entre elles de manière qu'une ligne tracée, avant la flexion, perpendiculairement à la longueur, dût devenir, après la flexion, une normale commune aux courbes affectées par les deux pièces, la résistance à la flexion s'obtiendrait en retranchant du moment d'élasticité du solide, regardé comme plein, le moment d'élasticité du solide qui occuperait l'intervalle des deux pièces.

Soit donc a la largeur commune des deux pièces, b' la hauteur de l'assemblage et b'' celle de l'intervalle; les expressions des moments d'élasticité et de rupture seront respectivement

$$\alpha = A \frac{a(b'^3 - b''^3)}{12}, \quad \beta = B \frac{a(b'^3 - b''^3)}{6b'} \dots \dots \dots (3)$$

L'hypothèse sur laquelle ces formules sont fondées ne peut être réalisée, qu'autant que les deux pièces, supportées parallèlement, sont attachées l'une à l'autre par un système de traverses et de coirps, ou par des clefs logées dans des entailles,

comme l'indique la figure ci-dessus.

Mais si l'une des pièces est courbée ou si elles le sont toutes deux, et si ces pièces sont attachées aux extrémités de manière à ne pouvoir glisser l'une sur l'autre, il suffira qu'elles soient réunies par des traverses pour que les formules (3) conviennent au système.

Il sera avantageux, dans chaque cas particulière, de régler la courbure des pièces de manière à rendre le système d'égal résistance (N^o 99).

Dans les deux derniers systèmes, chaque pièce, selon qu'elle est placée du côté qui devient concave ou convexe lors de la flexion, ne résistant qu'à une compression ou une tension exercée suivant la longueur, peut être formée de plusieurs parties ou mises bout-à-bout et maintenues dans le prolongement les unes des autres, ou liées entre elles par des assemblages capables de la même résistance que la pièce. Une pareille division des pièces supérieure et inférieure n'altérera pas sensiblement la force du système.

Lorsqu'on connaît la nature des efforts auxquels les pièces sont exposées dans les assemblages de ce genre, on peut choisir pour chacune, la matière qui convient le mieux. Le choix est déterminé par la condition d'obtenir une résistance donnée avec la moindre dépense possible. En comparant les résistances respectives du fer fondu et du fer forgé à la compression et à l'étension, avec les prix de ces matières, on jugera qu'il est toujours avantageux d'employer le fer fondu pour les pièces comprimées et le fer forgé pour les pièces tendues. On trouve aussi plus de sécurité dans cette disposition, quand l'édifice est exposé à des secousses, parce que le fer forgé peut souvent se prêter, sans se rompre, à une extension subite, qualité dont le fer fondu est presque entièrement dénué.

Le bois de chêne ou de sapin, comprimé ou tendu, coûte beaucoup moins, à égale résistance, que le fer forgé ou fondu et il est moins sujet à rompre par l'effet des chocs; mais il est moins durable, quand il est exposé à l'humidité.

Expériences sur la résistance
des solides composés de plusieurs pièces
arrangées entre elles.

154). Suivant quelques expériences de M^r. Cluys (ouvrage cité, page 65), un barreau de bois de chêne, de 1^{re} de largeur, 2¹/₂ de hauteur, posé horizontalement sur deux appuis distants de 5^{es} et chargé au milieu, a rompu sous un poids de 755^{lb}, produisant une flèche de 2^{es}.

Un autre bancan du même bois, de 1^m de largeur, 2^m de hauteur, formé de trois pièces entaillées de 3^m de 6 on 6^m, et tenues par des boulons de 1^m $\frac{1}{2}$ de diamètre; pote et chargé comme le précédent, a rompu sous un poids de 475^{kg}, produisant une flèche de 3^m 2^m.

Ainsi, le second bancan était à peu près aussi fort que s'il eût été d'une seule pièce.

Les expériences de M^r. Buleau (ouvrage cité, page 40), ont donné les résultats suivants. Les pièces toutes de 0^m 06 de largeur étaient posées horizontalement sur deux appuis et chargées au milieu. Les boulons, au moyen desquels ces pièces étaient assemblées, avaient 0^m 02 de diamètre et étaient espacés de 0^m 14. Les résultats sont ramenés par le calcul à la flèche de la courbe affectée pour chaque pièce sous une charge de 10^{kg}.

Pour le système formé par des pièces en croix, la résistance à la flexion diffère peu de celle qu'on trouve par la formule (2). Quand aux pièces simplement serrées par des boulons, la résistance est plus petite et d'autant plus que l'intervalle des pièces est plus grand; ce qui doit être attribué à la flexion des boulons.

Indication des Pièces.	Distance des Appuis	hauteur Totale	hauteur du vide	Flèche de courbure.
	mètres	millimètres	millimètres	millimètres
Deux pièces de fer du Périgord, posées à plat, et supportées sans boulons.	2, .	31, 1	0, .	7, .
Les mêmes posées à plat, tenues par des boulons. . .	4, .	31, .	0, .	11, 5
Les mêmes écartées de 0 ^m 01, au moyen de cales serrées par les boulons.	4, .	32, .	11, .	4, 57
Les mêmes écartées de 0 ^m 02, par le même moyen. .	4, .	42, .	21, .	2, 6
Les mêmes écartées de 0 ^m 032 par le même moyen.	4, .	53, .	32, .	1, 8
Les mêmes écartées de 0 ^m 153 au moyen de pièces en croix.	5, 8	174, .	153, .	0, 375
Deux pièces de fer du Périgord, serrées l'une sur l'autre par des boulons.	4, 0	40, .	0, .	2, 2

De l'usage des armatures pour consolider les pièces, les prolonger ou les joindre bout-à-bout.

Des armatures propres à consolider les pièces, les prolonger ou les joindre bout-à-bout.

(55). On peut consolider des pièces en bois au moyen d'armatures en fer. Quand une pièce supporte un effort dirigé perpendiculairement à sa longueur, la meilleure disposition consiste à consolider



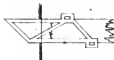
dont les faces latérales de cette pièce, un assemblage formé d'une pièce courbe et d'un tirant rectiligne, dont les extrémités sont assujetties l'une à l'autre. Ici, l'on encastre un pareil assemblage entre deux pièces de bois posées l'une à côté de l'autre, et tenues par des boulons : si le contact établi entre les points du fer et du bois se maintient exactement dans la flexion ; on si, pour plus de sûreté, l'assemblage en fer est consolidé par des traverses, la résistance du système, équivaudra à la somme des résistances de la pièce en bois et de l'assemblage en fer. Le tirant rectiligne devra être en fer forgé et la courbe en fer fondu.

Lorsque des pièces doivent être tenues à un effort dirigé perpendiculairement à leur longueur, on peut les prolonger ou on assujettir deux dans le prolongement l'une de l'autre, d'une manière très-solide, en employant une portion de tuyau, dans lequel les extrémités des pièces seraient contenues et fortement serrées. Mais comme la paroi intérieure du tuyau ne serait pas pressée sur toute son étendue, il y a lieu d'en supprimer une partie et de simplifier la disposition, sans en abandonner le principe.

Par exemple, une pièce de bois, qui doit être encastrée horizontalement, peut être prolongée dans l'encastrement au moyen de deux armatures en fer fondu, appliquées contre les faces latérales et réunies en m, n par des traverses. Les faces supérieures et inférieures de la pièce doivent être serrées fortement contre ces traverses avec des cables ou des vis de pression. Par cette disposition, la pièce ne peut céder à un effort dirigé de haut ou bas qu'en rompant au-dessus de la traverse n.

L'armature indiquée en marge servirait à prolonger une pièce destinée à porter un poids à son extrémité, et devant remonter, elle pourrait former les extrémités d'une poutre dont les portées seraient dérivées.

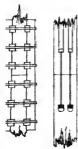
Enfin, l'armature représentée dans cette figure peut être employée pour assujettir l'une au bout de l'autre deux pièces dont on voudrait n'en faire qu'une, ou pour consolider une poutre que la charge aurait fait rompre. Mais la sûreté n'est pas aussi assurée dans le second cas que dans le premier, parce qu'alors l'armature se trouvant dans la partie où la pièce tendrait à prendre la plus grande courbure, il faudrait un contact beaucoup plus parfait entre la pièce et l'armature, pour qu'il n'y eût pas de flexion sensible.



Dans ces appareils, la résistance des armatures peut être évaluée par la formule (3 du § 133). Il est nécessaire que les portions de surface sur lesquelles la pression s'établit soient assez grandes pour que le bois ne s'y comprime pas sensiblement. La valeur de la pression sera toujours facile à calculer. Dans l'anti-pénultième figure, par exemple, la pression en *m* doit faire équilibre autour du point *n* au poids dont la pièce est chargée; la pression en *n* est égale à la somme de ces poids et de la pression exercée en *m*.


Les deux parties d'une pièce capotée à fléchir transversalement de haut en bas peuvent encore être réunies de la manière indiquée ci-contre, au moyen d'une pièce juxtaposée en dehors, abijettée par des clefs de bois dur, pénétrant dans des entailles et serrées par des brides. En effet, les fibres, lors de la flexion, sont comprimées dans la partie supérieure à *m* de la section transversale, et étendues dans la partie inférieure à *n*. Le joint *m n* ne nuit pas (§ 78) à la résistance des fibres comprimées et la résistance des fibres étendues, qui se trouvent coupées, est suppléée par celle de la pièce appliquée par dehors. On peut déterminer la force de cette pièce par la condition que le moment de la résistance de ses fibres, pris par rapport à l'axe d'élasticité *a*, soit égal au moment des fibres coupées dans l'intervalle *a n*, pris par rapport au même axe.

Quant aux pièces placées dans le prolongement l'une de l'autre et exposées à une tension longitudinale, on peut les assembler au moyen de pièces juxtaposées, abijettées par des clefs et des brides. On peut aussi employer des tirants de fer, soit on les cache dans le bois, soit on les plaçant en dehors et les fixant à des traverses. Dans tous les cas, les pièces réunies sont nécessairement affaiblies au point de jonction, attendu que la section transversale est diminuée par l'effet des entailles. On doit donner aux tirants une force égale à celle qui existe au bois, et il faut que la surface de bois sur laquelle ces tirants prennent un appui soit assez grande pour qu'il n'y ait pas écrasement, et que l'adhésion latérale des fibres qui tendent à se détacher ne puisse être rompue.



Notes.

I Sur le N.º 18.



Un solide élémentaire, composé de trois fibres superposées, étant fléchi, ces fibres à cause de leur cohésion latérale, agissent l'une sur l'autre : la fibre 1, placée à la convexité, et qui est allongée, tendant à reprendre sa longueur primitive, agira sur la fibre intermédiaire 2, pour l'accourcir; tandis que la fibre 3, placée à la concavité, et qui est accourcie, tendant pareillement à reprendre sa première longueur, agira sur la même fibre intermédiaire 2, pour l'allonger, et, comme les deux actions contraires sont égales, cette fibre intermédiaire ne changera pas de longueur et sera simplement pliée.

II Sur le N.º 21.

1.º La loi qu'on admet consiste en ce que $\frac{B}{O}$ est proportionnelle à $\frac{\lambda}{l}$; d'où

$$\frac{P}{O} = A \frac{\lambda}{l} \dots \dots \dots (1)$$

équation entre les deux variables P et λ .

On suppose aussi que cette loi ou l'équation qui l'exprime se continue jusqu'au terme de la rupture: soient P' et λ' les valeurs de P et λ , correspondantes à ce terme, de manière qu'on ait $\frac{P'}{O} = A \frac{\lambda'}{l}$; comme à ce même terme on a

$$\frac{P'}{O} = B \dots \dots \dots (2)$$

il s'en suit

$$B = A \frac{\lambda'}{l}; \text{ d'où } A : B :: l : \lambda'.$$

Si donc on connaissait l'allongement $\frac{\lambda'}{l} = l'$, qui répond à la rupture, on conclurait $B = A l'$ ou $A = \frac{B}{l'}$; réciproquement A et B étant connus, on aura

$$l' = \frac{B}{A} \dots \dots \dots (3)$$

Soit P^0 la valeur de P , qui par extension de la loi admise, répondrait à $\lambda = l$; il viendra $A = \frac{P^0}{O}$; on peut donc dire que le coefficient A est, pour l'unité superficielle, le poids capable d'allonger ou d'accourcir le corps d'une quantité égale à sa longueur primitive.

On a dit par extension de la loi, parce que la rupture, pourra arriver avant que l'allongement ait atteint la limite l' . En effet, représentons-nous les molécules d'une même

fibre comme une suite de petits ressorts liés chacun à chacun par une force égale à la ténacité et qui est par conséquent d'une grandeur déterminée. Lorsque la fibre attachée fixement par une extrémité sera tirée suivant sa longueur, par un poids appliqué à l'autre extrémité, la force actuelle d'élasticité de chaque ressort sera mesurée par le poids; cette force augmentera en même raison que ce poids et finira par égaler la force de ténacité, qui n'aura pu que diminuer par l'action du poids, si elle n'était pas demeurée constante; de sorte qu'à ce terme, la rupture s'opérera pour peu que le poids agissant augmente encore.

On voit que la substitution de B à la place de $A \frac{V}{L}$, dans l'équation (1) produit l'équation (3) et devient ainsi explicitement indépendante de $\frac{V}{L}$ ou V . Comme l'élasticité s'altère réellement quand le poids P augmente jusqu'au terme qui répond à la rupture, c'est-à-dire, comme dans le vrai, il faudrait au-delà d'une certaine variation de longueur, un poids plus grand ou un poids plus moindre pour produire sur une fibre le même degré d'accroissement ou le même degré d'allongement, le coefficient B déterminé par expérience, indépendamment du coefficient A , corrigera en quelque sorte, ce que l'hypothèse du § 17, peut avoir de déficient.

Coulomb a déterminé, dans le mémoire cité, la résistance à l'écartement ou à la rupture causée par la compression, pour les solides composés de molécules agglutinées, comme la pierre: soit a le côté $ab=ad$ de la base $abcd$ du prisme $ABCD$, chargé d'un poids P et coupé par un plan AS faisant avec l'horizon un angle quelconque θ . On trouve sans difficulté, qu'en égard seulement à la cohésion sur la section AS , l'équation d'équilibre est $P \sin \theta - \frac{P a^2}{\cos \theta} = 0$, qui donne:

$$P = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sin \theta} \dots \dots (3)$$

Le minimum de P répond évidemment à $\theta = 45^\circ$ et ce minimum est

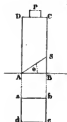
$$P = \frac{1}{2} a^2 \dots \dots (4)$$

d'où réciproquement

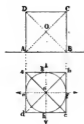
$$\delta = \frac{P}{2 a^2} \dots \dots (5)$$

Autrement, l'action libre du poids P parallèlement à SA sera exprimée par $\delta = P \sin \theta - \frac{P a^2}{\cos \theta}$; elle sera un maximum et ce maximum sera nul si l'on a les équations $\delta = 0$, $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$, qui donnent les mêmes résultats que la précédente.

(3) détermination de la résistance
des pierres à l'écartement, par Coulomb.



Explication de la rupture singulière
d'un Cube.



On tire de là l'explication de la rupture singulière d'un solide cubique : Perronet, Gauthier et Rondelet ont observé qu'un cube de pierre, soumis à une pression capable de le rompre, se divise quelquefois en six pyramides ayant son centre pour sommet commun et les faces pour bases respectives.

Il est permis de supposer que le cube au lieu de s'appuyer sur un plan inébranlable soit repoussé par une force P' égale et contraire à la pression $P = 2\sqrt{2}$. Or il n'y a, pas de raison pour que la force P opère la rupture suivant l'un des quatre sections diagonales, telles que AC , exclusivement aux autres et elle est insuffisante pour l'opérer à la fois suivant les quatre tout entières. Mais que l'on partage cette force en quatre autres, égales, qui répondent aux quatre faces de la pyramide supérieure et que l'on décompose chaque force partielle perpendiculairement et parallèlement à la face respective; toutes les composantes seront égales et tandis que les premières sollicitent les pyramides latérales à s'éloigner du centre, les secondes opéreront la rupture suivant les faces de la pyramide supérieure; car si l'on représente la force P par le nombre 8, chacune des composantes sera exprimée par $\sqrt{2}$ ou le quart de $4\sqrt{2}$, valeur de la composante de P , parallèle à AC . D'ailleurs les quatre faces de la pyramide supérieure équivalent ensemble à la section rectangulaire AC ; ainsi, une force $\sqrt{2}$, parallèle à une des faces, suffit pour vaincre la cohésion sur cette face.

Maintenant ce qui a été dit de la force P doit s'entendre de la force P' ; donc la rupture s'opérera aussi suivant les faces de la pyramide inférieure et chacune des pyramides latérales sera sollicitée par une seconde force $\sqrt{2}$, symétrique de la première, c'est-à-dire, sera poussée en dehors par une force résultante 2, perpendiculaire à sa base.

Enfin les quatre forces 2, appliquées perpendiculairement aux bases des quatre pyramides latérales, suffisent pour détruire la cohésion sur les faces verticales par lesquelles ces pyramides adhèrent les unes aux autres; car chaque force se décompose en deux égales à $\sqrt{2}$ et perpendiculaires aux faces verticales de la pyramide respective, on voit que chacune des quatre faces verticales, qui est le quart du rectangle AC est tirée en sens contraire par deux forces égales à $\sqrt{2}$.

À la vérité, les quatre forces 2 pourraient, abstraction

faite du frottement, qu'on la rupture tout à la fois suivant les sections traitées a, c , b, d et les sections droites e, f , g, h ; mais dans l'état physique, le frottement existe nécessairement et il opposera plus de résistance à cette dernière rupture qui par conséquent n'aura pas lieu.

S'il s'agissait d'un cylindre à base circulaire, dont la hauteur égalât le diamètre, on trouverait de la même manière, une division en deux cônes de mêmes bases que le cylindre, ayant pour sommet commun le milieu de l'axe, et un solide intermédiaire, engendré par la révolution du triangle OBC autour de cet axe, solide divisible lui-même par l'action des forces P, P' suivant deux plans méridiens, rectangulaires, quelconques.

III. Sur le N.º 44.

Théorie des axes et moments d'Elasticité.

1. Nous avons défini l'axe et le moment d'élasticité proprement dits: il est dans la nature de cet axe de passer par le centre de gravité de la section transversale du solide, cependant s'il arrive que cette section soit formée de l'assemblage continu de plusieurs figures, on peut avoir à déterminer les moments de celles-ci, relativement à un axe qui ne passe point par leurs centres de gravité particuliers, mais par celui de la figure entière. Les axes et moments d'élasticité rentrent dans ceux d'inertie relatif aux figures planes; la théorie de ces derniers, qui avait été négligée comme purement spéculative, intéresse donc réellement l'art des constructions; elle peut d'ailleurs décider des questions incertaines et révéler des propriétés utiles; c'est pourquoi nous allons essayer de la développer.

2. Afin d'abréger, nous posons $du dv = dm$ et nous représenterons les quantités $\int u^2 dm$, $\int v^2 dm$, $\int uv dm$, par P, Q, R , pour des axes rectangulaires, quelconques, ayant leur origine au centre de gravité; par P', Q', R' , pour des axes répondant à un point quelconque, dont les coordonnées rapportées au centre de gravité seront p, q ; enfin, par C, D , et C', D' ce que deviendront P, Q et P', Q' , quand R ou R' sera nul, c'est-à-dire, quand il s'agira d'axes principaux.

3°. Supposons l'origine au centre de gravité; nous aurons $\int u \, dm = 0$, $\int v \, dm = 0$; les formules par lesquelles on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, en un point dont les coordonnées soient p et q , donnent

$$u' = u - p, \quad v' = v - q \dots \dots \dots (1)$$

Substituant ces valeurs dans $\int u'^2 \, dm$, $\int v'^2 \, dm$, on trouve

$$P' = P + p^2 m, \quad Q' = Q + q^2 m \dots \dots \dots (2)$$

Donc, de tous les axes parallèles entre eux, celui pour lequel le moment est un minimum passe par le centre de gravité.

4°. La même substitution dans $\int u'v' \, dm$ produit

$$R' = R + pqm \dots \dots \dots (3)$$

Donc la quantité R augmente ou diminue selon que l'origine s'écarte du centre de gravité, dans les angles des coordonnées de même signe, ou dans les angles des coordonnées de signes contraires, et cette quantité ne varie pas quand l'origine se meut suivant l'un des axes primitifs. Enfin, si $R = 0$, ou que les axes primitifs soient des axes principaux, on a aussi $R' = 0$, pour toute position de l'origine sur ces axes, et cette propriété est particulière au centre de gravité; puisque, pour tout autre point, le second membre de (3) renfermerait de plus les termes $-p \int v \, dm$, $-q \int u \, dm$.

5°. Les formules au moyen desquelles on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre de même origine donnent

$$u' = v \sin \epsilon + u \cos \epsilon, \quad v' = v \cos \epsilon - u \sin \epsilon \dots \dots (4)$$

d'où l'on tire

$$u' = -\frac{dv'}{d\epsilon}, \quad v' = \frac{du'}{d\epsilon} \dots \dots \dots (5)$$

on voit de quoi la condition que le moment P soit un maximum ou un minimum, savoir, $\frac{d \int u'^2 \, dm}{d\epsilon} = 0$, ou $\int u' \frac{du'}{d\epsilon} \, dm = 0$, se réduit à

$$\int u'v' \, dm = 0 \dots \dots \dots (6)$$

équation à laquelle conduit aussi la condition $\frac{d \int v'^2 \, dm}{d\epsilon} = 0$,

et que l'on conçoit on observant que par la manière même dont elle se présente en mécanique, elle suppose l'élément superficiel dm ou $du \, dv$ toujours positif, quel que soit l'angle des axes, dans lequel il se trouve; de sorte que la valeur partielle de la quantité $\int u'v' \, dm$ doit nonobstant le fait du calcul, être prise positivement ou négativement, selon que u et v sont de même signe ou de signes contraires.

6°. Substituant dans $\int u'v' \, dm = 0$, pour u' et v' leurs valeurs et supposant que l'origine soit un point quelconque

nous obtenons

$$(P' - Q') \sin \varepsilon \cos \varepsilon - R' (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon) = 0 \dots \dots (g)$$

d'où

$$\tan 2\varepsilon = \frac{2R}{P' - Q'} \dots \dots (h)$$

Or, comme une valeur donnée de $\tan 2\varepsilon$ détermine deux angles dont les moitiés sont ε et $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, on doit inférer qu'à chaque point de la figure répond un système d'axes rectangulaires par rapport auxquels les moments sont l'un un maximum, l'autre un minimum. Ce sont là ceux qu'on nomme axes principaux.

7°. Quand le système répond au centre de gravité, la formule (h) devient

$$\tan 2\varepsilon = \frac{2R}{P - Q} \dots \dots (h')$$

les deux moments sont moindres respectivement que ceux qui se rapportent à tout système parallèle et le plus petit de ces moments est un minimum absolu.

8°. Chacun des deux axes qui forment ce système remarquable est proprement un axe d'élasticité; ainsi il existe dans toute figure plane deux axes d'élasticité, perpendiculaires entre eux, qui passent par le centre de gravité et pour lesquels les moments d'élasticité sont respectivement un maximum et un minimum.

9°. Il est d'ailleurs évident que dans les constructions un solide devra toujours être disposé de manière que la flexion tende à s'opérer autour de celui des deux axes d'élasticité, auquel répond le plus grand moment.

10°. Si $R' = 0$, d'où $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, les axes primitifs sont eux-mêmes les axes principaux; si $P' = Q'$, il vient $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ et $\varepsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$; si $P' = Q'$ et $R' = 0$, on a $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire qu'une droite quelconque passant par l'origine est un axe principal.

11°. La substitution donne encore

$$\int u^2 dm = P' \cos^2 \varepsilon + Q' \sin^2 \varepsilon + 2R' \sin \varepsilon \cos \varepsilon \dots (i)$$

ou simplement

$$\int u^2 dm = C' \cos^2 \varepsilon + D' \sin^2 \varepsilon \dots (k)$$

quand les axes primitifs des coordonnées sont les axes principaux, et

$$\int u^2 dm = P \cos^2 \varepsilon + Q \sin^2 \varepsilon + 2R \sin \varepsilon \cos \varepsilon \dots (l)$$

$$\int u^2 dm = C \cos^2 \varepsilon + D \sin^2 \varepsilon \dots (m)$$

quand le centre de gravité est l'origine.

12°. Il suffira de remplacer ε par $\varepsilon + \frac{\pi}{2}$ dans ces formules

pour obtenir les analogues, relatives à $fv^2 dm$.

13°. Ainsi, on aura le moment propre à un axe quelconque, en cherchant d'abord, par les formules (l), (m) ou leurs analogues, celui qui conviendrait à un axe parallèle, mené par le centre de gravité et y ajoutant ensuite le produit de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

14°. Si les moments relatifs aux nouveaux axes devaient avoir une même valeur M ; en ajoutant et retranchant, membre à membre, l'équation (2) et son analogue, on aurait

$$M = \frac{P+Q'}{2} \dots \dots \dots (n)$$

$$\text{tang } 2\epsilon = - \frac{P'-Q'}{2R'} \dots \dots (o)$$

Donc, par comparaison avec (h), les axes relativement auxquels les moments sont égaux, diffèrent en deux, également les angles entre les axes principaux.

15°. Si en même temps les nouveaux axes des coordonnées devaient être les axes principaux, il viendrait $\frac{2R'}{P'-Q'} = - \frac{P'-Q'}{2R'}$, c'est-à-dire,

$$(P'-Q')^2 + 4R'^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

d'où $P'=Q'$, $R'=0$ et $\epsilon = \frac{\pi}{2}$.

Donc, quand les deux moments principaux sont égaux, leur valeur commune P ou P' est constante pour tous les axes passant par l'origine.

Réciproquement, l'égalité des moments, quel que soit ϵ , entraîne $P'=Q'$ et $R'=0$, ou $P=Q$ et $R=0$.

16°. Pour déterminer, s'il y a lieu, les points par rapport auxquels les deux moments principaux et, par conséquent, tous les moments sont égaux, on supposera que les axes primitifs soient les axes principaux, répondant au centre de gravité; l'équation (e) se réduira à

$$R' = pqm \dots \dots \dots (5)$$

mais, puisque les nouveaux axes des coordonnées doivent être aussi des axes principaux, on a $pqm=0$; d'où $p=0$ ou $q=0$.

Donc le point demandé, s'il existe, ne peut se trouver que sur l'un des axes primitifs. Soit $p=0$ et q indéterminé, les moments relatifs aux nouveaux axes seront C et $D+q^2m$ et leur égalité donnera

$$q^2 = \frac{C-D}{m} \dots \dots \dots (6)$$

il faut donc qu'on ait $C > D$.

Donc, si C et D sont inégaux, il existe deux points O

satisfaisant à la condition, qui sont sur l'axe par rapport auquel le moment est le plus grand, de part et d'autre du centre de gravité et à égales distances; mais si $C=D$, il n'y a pas d'autre point que le centre de gravité, qui satisfasse à la condition.

7°. En appliquant l'équation (g) au centre de gravité et ayant égard à (d) et (e), on a celle-ci

$$(C-D+p^2m-q^2m)\sin\epsilon\cos\epsilon-pqm(\cos^2\epsilon-\sin^2\epsilon)=0\dots(7)$$

qui produit toujours l'équation (h) et à laquelle on parviendrait aussi en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, puis les faisant tourner d'une quantité angulaire ϵ , autour de la nouvelle origine. Or, de $p=0$, ou $q=0$, ou de $p=0$ et $q=0$ résulte également,

$$\sin 2\epsilon=0\dots\dots\dots(8)$$

d'où $\epsilon=0$ et $\epsilon=\frac{\pi}{2}$. Réciproquement, de $\epsilon=0$ ou $\epsilon=\frac{\pi}{2}$, avec $p=0$ ou $q=0$, ou avec $p=0$ et $q=0$, résulte $\int u^2 dm=0$.

Donc, comme on l'a déjà vu, la quantité $\int u^2 dm$ est nulle pour tout système formé par un des axes principaux, répondant au centre de gravité et par une parallèle quelconque, menée à l'autre, c'est-à-dire, que ce système on constitue un d'axes principaux.

18°. Maintenant, si dans les formules (2) on remplace u et v par $u-p$ et $v-q$, l'équation $\int v^2 dm=0$, par la substitution de la valeur de v , deviendra

$$p\sin\epsilon-q\cos\epsilon=0\dots\dots\dots(9)$$

d'où l'on tire $\frac{p}{q}\sin^2\epsilon=\sin\epsilon\cos\epsilon$, $\frac{p}{q}\sin^2\epsilon=\cos^2\epsilon$, ce qui réduit (7) à (8). Mais, pour $\epsilon=0$, ou $\epsilon=\frac{\pi}{2}$, l'équation (9) donne $q=0$ et p quelconque, ou $p=0$ et q quelconque;

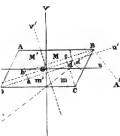
Donc, la coexistence des équations

$$\int v^2 dm=0\dots\dots(a), \quad \int u^2 dm=0\dots\dots(b)$$

indique un système d'axes principaux dont l'un passe par le centre de gravité, et dont l'autre est perpendiculaire au premier, sans que sa position absolue soit déterminée.

On pourra donc profiter de cette indétermination pour satisfaire en même temps aux deux équations (c), qui seront réduites compatibles par l'équation (b).

19°. Il existe encore certains axes obliques qui jouissent de propriétés analogues à celles des axes rectangulaires de moments (Mémoire de J. Binet, 16^e Cahier du journal de l'Ecole Polytechnique); mais l'obliquité de ces axes les rend étrangers à notre objet.



20. Appliquons cette théorie au parallélogramme : soient $AB=a$, $BC=b$ et $\angle ABC=\alpha$; l'équation du côté BC sera...

$$u = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} v + \frac{a}{2} \text{ et l'on trouvera sans difficulté}$$

$$P = \frac{1}{12} ab \sin \alpha (a^2 + b^2 \cos \alpha), Q = \frac{1}{12} ab^3 \sin^3 \alpha, R = \frac{1}{12} ab^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \dots (10)$$

d'où résultera :

$$\tan g \varepsilon = \frac{2b^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 + b^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \dots \dots \dots (11)$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$a^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon = b^2 \sin (\alpha - \varepsilon) \cos (\alpha - \varepsilon) \dots \dots \dots (12)$$

et qui signifie que les deux triangles ABb , Bce sont équivalents, ou sous la forme

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin 2(\alpha - \varepsilon)}{\sin 2\varepsilon} \dots \dots \dots (13)$$

Pour construire l'angle ε , on cherchera en lignes le rapport $\frac{a^2}{b^2}$, on divisera l'angle $ABA' = 2\alpha$, en deux parties dont les sinus soient dans le rapport trouvé, puis on subdivisera en deux également la partie adjacente AB .

21. au moyen de la formule (1)

$$C = \frac{1}{12} ab \sin \alpha [a^2 \cos^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 (\alpha - \varepsilon)] \dots \dots \dots (14)$$

expression dont le coefficient différentiel $\frac{dC}{d\varepsilon}$, égalé à zéro, redonne effectivement l'équation (12)

Observant qu'en général $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, développant $\cos(2\alpha - 2\varepsilon)$ et chassant $\sin 2\varepsilon$, $\cos 2\varepsilon$ par le moyen de (11) qui revient à

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon} = \frac{b^2 \sin 2\alpha}{a^2 + b^2 \cos 2\alpha} \dots \dots \dots (15)$$

on obtient

$$C = \frac{1}{24} ab \sin \alpha (a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 \cos 2\alpha}) \dots \dots (16)$$

d'où l'on conclut

$$D = \frac{1}{12} ab \sin \alpha (a^2 + b^2 - \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 \cos 2\alpha}) \dots \dots (17)$$

Réciproquement, en substituant dans la formule (m) et son analogue, ces valeurs de C et D ainsi que celle de $\cos 2\varepsilon$, tirée de (15), on reproduit les expressions (10) de P et Q .

22. Soit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il viendra $\tan g \varepsilon = \frac{0}{a^2 - b^2}$; d'où $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Donc, dans le rectangle les axes principaux répondant au centre de gravité sont perpendiculaires sur les côtés.

Soit de plus $b=a$, on aura $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$;

Donc, toute droite menée par le centre de gravité du carré est un axe d'inertie.

Dans ces deux cas, les formules (16) et (17) se réduisent à

$$C = \frac{1}{12} a^2 b, D = \frac{1}{12} ab^3 \dots (18)$$

et

$$C = D = -\frac{1}{12} a^4 \dots \dots \dots (19)$$

22°. Par la nature des axes $G u', G v'$ on a en général $M + m' = M' + m$, et par la nature du parallélogramme, $M = m'$, $M' = m$; d'où l'on conclut $M = M'$, $m = m'$.

Donc, pour les axes principaux répondant au centre de gravité du parallélogramme, les équations (c) sont satisfaites d'elles-mêmes.

23°. Mais afin de donner un exemple simple de l'emploi de ces équations, considérons le triangle isocèle abc et désignons bc par a , ad par h , GO par p , aO par x ; d'où et de la similitude des triangles adb , aoq , il résulte $OQ = \frac{ax}{ah}$; ainsi l'équation du côté ab sera $v' = \frac{a}{ah} (u' + x)$, et nous aurons

$$\int u' v' dm = \frac{a^2}{8h^2} \left(\frac{u'^4}{4} + \frac{2}{3} x u'^3 + \frac{1}{2} x^2 u'^2 \right)$$

Cette intégrale qui doit commencer au point O dont les coordonnées sont $u' = 0$, $v' = 0$ et à laquelle par conséquent il ne faut pas ajouter de constante, doit être prise jusqu'à $u' = h - x$, pour $bdcq$, et jusqu'à $u' = -x$, pour aoq ; en égalant les deux résultats et tirant la valeur de x , on trouve $aO = \frac{3}{2} h$; d'où

$$p = -\frac{1}{4} h \dots \dots \dots (20)$$

24°. Relativement aux axes $G u, G v$ l'équation de ab est $v = \frac{a}{2h} (u + \frac{2}{3} h)$; en conséquence on a

$$\int u^2 dm = \frac{a}{2h} \left(\frac{u^4}{4} + \frac{2}{3} h u^3 \right), \int v^2 dm = \frac{a^3}{24h^2} \left(\frac{u^4}{4} + \frac{2}{3} h u^3 + \frac{2}{3} h^2 u^2 + \frac{2}{9} h^3 u \right),$$

intégrales qui doivent être prises depuis $u = 0$, mais jusqu'à $u = \frac{h}{3}$, pour $bdcq$ et $u = -\frac{2}{3} h$, pour aoq . Ajoutant les valeurs absolues des deux résultats de chaque formule intégrale et doublant, on trouve

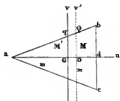
$$C = \frac{ah^3}{36}, \quad D = \frac{a^3 h}{48} \dots \dots \dots (21)$$

De là et de ce que $abc = \frac{1}{2} ah$, $p = -\frac{1}{4} h$, on conclut

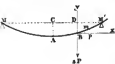
$$C' = \frac{ah^3}{4} \dots \dots \dots (22)$$

25°. Les moments C, D et conséquemment les moments relatifs à tous les axes passant par G seront égaux à $h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$, c'est-à-dire, si le triangle est équilatéral.

26°. Selon qu'on aura $D > C$ ou $C > D$, il serait avantageux que ad ou Gv fût l'axe d'élasticité et alors Ov' ou ad devrait être respectivement la trace du plan des forces sur celui de la section abc du solide.



Le poids répond à un point quelconque de la longueur.



1º. Prenons le point B où le poids est suspendu et qui est le point de rupture, pour l'origine des coordonnées Bp ou x et mp ou y, et c indiquant toujours la moitié CM de l'intervalle entre les appuis, désignons par γ' et ξ les distances horizontale et verticale entre l'origine B et le point C et par φ l'angle que la tangente à cette origine fait avec l'horizon ou avec l'axe des abscisses; les résistances des appuis M et M', abstraction faite de la courbure et du frottement, équivaldront aux composantes verticales $P \frac{c+\gamma'}{c}$, $P \frac{c-\gamma'}{c}$ du poids $\pm P$ et l'on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\alpha} \frac{c+\gamma'}{c} (c-\gamma')x - \frac{1}{2}x^2 + \tan \varphi$, $y = \frac{P}{\alpha} \frac{c+\gamma'}{c} [(c-\gamma')x - \frac{1}{2}x^2] + x \tan \varphi$, $f = \frac{P}{\alpha} \frac{(c+\gamma')(c-\gamma')^3}{3c} + (c-\gamma') \tan \varphi$.

Pour la partie BM on aura pareillement $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\alpha} \frac{c-\gamma'}{c} (c+\gamma')x$; d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\alpha} \frac{c-\gamma'}{c} [(c+\gamma')x - \frac{1}{2}x^2] - \tan \varphi, y = \frac{P}{\alpha} \frac{c-\gamma'}{c} [(c+\gamma')x - \frac{1}{2}x^2] - x \tan \varphi, f = \frac{P}{\alpha} \frac{(c-\gamma')(c+\gamma')^3}{3c} - (c+\gamma') \tan \varphi.$$

Les quantités ξ et $\tan \varphi$ doivent avoir les mêmes valeurs dans ces équations qui, par élimination, donneront

$$\tan \varphi = \frac{P}{\alpha} \frac{\gamma'(\xi^2 - \gamma'^2)}{3c}, \quad f = \frac{P}{\alpha} \frac{(c^2 - \gamma'^2)^2}{3c} \dots \dots \dots (1)$$

Les parties BM, BM' de la courbe sont exprimées respectivement par les équations

$$y = \frac{P}{\alpha} \frac{c+\gamma'}{c} \left[\frac{1}{3}(c-\gamma')\gamma'x + \frac{1}{2}(c-\gamma')x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right], y = \frac{P}{\alpha} \frac{c-\gamma'}{c} \left[-\frac{1}{3}(c+\gamma')\gamma'x + \frac{1}{2}(c+\gamma')x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right].$$

En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui répond à la dernière de ces équations, on obtient

$$x = c + \gamma' - \sqrt{c^2 + \frac{1}{3}\gamma'c - \frac{1}{3}\gamma'^2};$$

Soit ξ la valeur correspondante de γ , ce sera celle de l'ordonnée minimum et $\xi - \xi'$ sera la flèche de courbure du solide.

Le solide tend à se rompre au point B, où $\alpha \frac{dy}{dx}$ est un maximum; lorsqu'il est prêt de se rompre, le moment de la résistance à la flexion, en ce point, est égal au moment de la résistance à la rupture; or, ce maximum est $P \frac{c^2 - \gamma'^2}{c}$; on a donc

$$\beta = P \frac{c^2 - \gamma'^2}{c} \dots \dots \dots (2)$$

Le poids est distribué uniformément sur une portion de la longueur.



2º. Soient D et E, E', les projections sur MM', du milieu B et des extrémités N, N' de l'intervalle sur lequel le solide est chargé du poids P, par unité de longueur. Indiquant toujours CM et CD par c et γ , désignons DE par c' ; les coordonnées Bp, mp, par x, y; l'abaissement BD ou MP du point B, par ξ et l'angle que

la tangente on ce point fait avec l'horizon, par φ . Les résistances des appuis M, M' équivalent aux composantes verticales $c'p \frac{c+\gamma}{c}$, $c'p \frac{c-\gamma}{c}$ de la charge $\pm c'p$. Or, chaque partie BM, BM' du solide est dans le même état que si, étant encastrée en B , elle était sollicitée dans un sens par une force égale à la résistance de l'appui M ou M' , et dans l'autre sens par les poids répartis sur BN ou BN' ; donc (N°. 60) on aura d'abord, pour tous les points compris entre B et N , $\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} (c-\gamma-x) - \frac{P}{\alpha} (\frac{c^2}{2} - c'x + \frac{x^2}{2})$; d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} [(c-\gamma)x - \frac{x^2}{2}] - \frac{P}{\alpha} (\frac{c^2}{2} - c'x + \frac{x^2}{2}) + \tan \varphi, y = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} [(c-\gamma) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}] - \frac{P}{\alpha} (\frac{c^2 x}{4} - \frac{c'x^2}{6} + \frac{x^3}{6}) + x \tan \varphi;$$

et en faisant $x=c$ dans ces équations, on trouvera pour les valeurs propres au point N ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} [(c-\gamma)c - \frac{c^2}{2}] - \frac{P}{\alpha} \frac{c^3}{6} + \tan \varphi, y = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} [(c-\gamma) \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{6}] - \frac{P}{\alpha} \frac{c^4}{8} + c \tan \varphi.$$

On aura ensuite, pour tous les points compris entre N et M , $\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} (c-\gamma-x)$; d'où l'on tire, en déterminant les constantes de manière que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y , qui répondront à $x=c$, soient égales aux précédentes,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} [(c-\gamma)x - \frac{x^2}{2}] - \frac{P}{\alpha} \frac{c^3}{6} + \tan \varphi, y = \frac{c'p}{\alpha} \frac{c+\gamma}{c} [(c-\gamma) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}] - \frac{P}{\alpha} (\frac{c^2 x}{6} - \frac{c'x^2}{12}) + x \tan \varphi.$$

faisant $x=c-\gamma$ dans cette dernière expression, il en résultera

$$f = \frac{c'p}{\alpha} \frac{(c+\gamma)(c-\gamma)^3}{3c} - \frac{P}{\alpha} [\frac{c^3(c-\gamma)}{6} - \frac{c'^4}{24}] + (c-\gamma) \tan \varphi.$$

En répétant les mêmes opérations pour l'autre partie BM du solide, on obtiendra

$$f = \frac{c'p}{\alpha} \frac{(c-\gamma)(c+\gamma)^3}{3c} - \frac{P}{\alpha} [\frac{c^3(c+\gamma)}{6} - \frac{c'^4}{24}] - (c+\gamma) \tan \varphi;$$

et de ces deux résultats on conclura, par l'élimination,

$$\tan \varphi = \frac{c'p}{\alpha} \frac{(4c^2 - 4\gamma^2 - c'^2)\gamma}{6c}, f = \frac{c'p}{\alpha} \left[\frac{(1c^2 - 2\gamma^2 - c'^2)(c-\gamma^2)}{6c} + \frac{c'^3}{24} \right] \dots (1)$$

La substitution de cette valeur de $\tan \varphi$ dans les expressions précédentes de y , donnera les équations individuelles des parties BN, NM de la courbe. De ces mêmes expressions, on deduira, par le simple changement de $c+\gamma$ en $c-\gamma$ et réciproquement, celles qui conviennent aux parties BN', NM' ; on connaîtra donc également la figure de la courbe partielle BM' . La flèche de courbure se trouvera comme au N°. (1°)

Le point B est celui de la plus grande courbure et où le solide tend à se rompre; par conséquent on a

$$\beta = c'p \left(\frac{c-\gamma^2}{c} - \frac{c'}{2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Solide supporté par trois ou un plus grand nombre de points d'appui.



Les appuis répondent au milieu A et aux extrémités M, M' de la longueur du solide qui supporte les poids P, P' dans les milieux N, N' de ses deux moitiés. Soient c la demi-longueur AM ou AM' et ω l'angle que fait avec l'axe Ax la tangente à la courbe de flexion, au point A.

Le solide pouvant être regardé comme encastré en A, on aura d'abord pour la partie AN, $\frac{d^2y}{dx^2} = P(\frac{c}{2} - x) - q(c - x)$ et en intégrant

$$\Delta \frac{dy}{dx} = P(\frac{cx}{2} - \frac{x^2}{2}) - q(c x - \frac{x^2}{2}) + \Delta \tan \omega, \Delta y = P(\frac{cx^2}{6} - \frac{x^3}{6}) - q(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + \Delta x \tan \omega \dots (2)$$

On aura ensuite pour la partie NM, $\Delta \frac{d^2y}{dx^2} = -q(c - x)$ et en déterminant les constantes d'intégration par la condition que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y, qui répondront à $x = \frac{c}{2}$, soient égales à celles qui résultent semblablement des équations (2)

$$\Delta \frac{dy}{dx} = -q(c x - \frac{x^2}{2}) + P \frac{c}{2} + \Delta \tan \omega, \Delta y = -q(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + (P \frac{c}{2} + \Delta \tan \omega)x - P \frac{c}{4} \dots (3)$$

Les équations relatives aux parties AN, N'M de la courbe, se déduisent des précédentes (2) et (3), par la substitution de P à P, de q à q et le changement du signe de $\tan \omega$. Or, les équations des parties NM, N'M', doivent donner y = 0, quand x = c; il viendra donc

$$-q \frac{c^2}{2} + P \frac{5c^2}{6} + \Delta \tan \omega = 0, -q \frac{c^2}{2} + P \frac{5c^2}{6} - \Delta \tan \omega = 0 \dots (4)$$

d'où et des équations (3), on tire

$$\tan \omega = \frac{P - P'}{3c}, P = \frac{11P + 11P'}{32}, q = \frac{13P - 13P'}{32}, q' = \frac{-13P + 13P'}{32} \dots (5)$$

Ces valeurs prouvent que les efforts exercés sur les appuis sont indépendants de Δ ou demeurent les mêmes, quelle que soit la flexibilité du solide, et que l'appui A supporte seul à très-peu près les $\frac{2}{3}$ de la charge totale. En les substituant dans les équations (2) et (3), on connaîtra complètement la figure du solide.

C'est au point A que la courbure est la plus grande et que le solide tend à se rompre; égalant donc β à la valeur de $\Delta \frac{d^2y}{dx^2}$ qui répond à ce point, on aura, pour l'équilibre de résistance à la rupture, l'équation

$$\beta = \frac{3P + 3P'}{32} c \dots (6)$$

Dans l'hypothèse P = P', il vient

$$\tan \omega = 0, P = \frac{11P}{16}, q = q' = \frac{5P}{16} \dots (7)$$

et

$$\beta = \frac{3P}{16} \cdot c \dots (8)$$

Chaque moitié du solide est dans le même état que si elle était encastrée horizontalement à une extrémité et appuyée librement à l'autre; car l'expression (8) quand on y écrit xP et xy au lieu de P et c , revient à l'expression (4) du N.^o 66.

VI. Après le N.^o 68.

Formules générales de la résistance à la rupture, selon Galilée et selon Mariotte et Leibnitz.

Il n'est pas difficile de trouver les formules générales de la résistance à la rupture, selon les principes de Galilée et de Mariotte et Leibnitz.

Galilée plaçait l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section de rupture et regardait la force intérieure développée en chaque point de cette section comme constante pour tous les points. Désignant donc par B la résistance sur l'unité superficielle; par a la longueur de la section; par b sa hauteur; par U, U' les ordonnées du contour relatives à l'abscisse u et par β le moment de la résistance à la rupture, on a

$$\beta = \frac{1}{2} B \int_0^a (U^2 - U'^2) du \dots \dots \dots (1)$$

expression qui, lorsque la section est rectangulaire, devient

$$\beta = B \frac{a b^3}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Selon la théorie attribuée à Mariotte et Leibnitz, l'axe horizontal d'équilibre passe par le point inférieur de la section, mais la force intérieure développée en chaque point est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe d'équilibre; on a donc en général

$$\beta = \frac{1}{3} \frac{B}{b} \int_0^a (U^3 - U'^3) du \dots \dots \dots (3)$$

et pour le rectangle

$$\beta = B \frac{a b^3}{3} \dots \dots \dots (4)$$

Les valeurs (2) et (4) de β sont dans le rapport de 3 à 2.

VII. Après le N.^o 80.

Résistance inférieure du solide encastré à l'extrémité supérieure libre.

1.^o Supposons que l'extrémité inférieure A du solide, étant encastrée, l'extrémité supérieure M demeure libre. En désignant par x l'ordonnée extrême BM , nous aurons $\frac{d^2 y}{dx^2} = Q(f-y)$, et, en intégrant,

$$y = f(1 - \cos x \sqrt{\frac{Q}{f}});$$

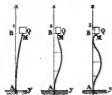
or, il faut avoir $y = f$ quand $x = c$, donc $c \sqrt{\frac{Q}{f}} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$; d'où

$$Q = \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4} \frac{f}{c^2} \dots \dots (1) \quad y = f \left[1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \frac{x}{c} \right] \dots \dots (2)$$

On trouvera, comme au N^o 80,

$$s = c \left\{ 1 + \left[\frac{(1K+1)\pi}{2} \frac{f}{2c} \right]^2 \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$f^2 = 4\sqrt{\frac{2}{Q}} \left[\frac{25}{(1K+1)\pi} - \sqrt{\frac{2}{Q}} \right] \text{ ou bien } f^2 = \frac{85^2}{(1K+1)^2 \pi^2} \left[1 - \frac{2(1K+1)^2 \pi^2}{4Q5^2} \right] \dots (4)$$



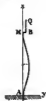
La figure (1) répond à $K=0$ et $Q = \frac{\pi^2}{4} \frac{E}{c^2}$; la figure (2) à $K=1$ et $Q = \frac{25\pi^2}{4} \frac{E}{c^2}$: les ordonnées des points situés à $\frac{1}{2}$ et à $\frac{3}{2}$ de AB , sont égales à f et $2f$. La figure (3) répond à $K=2$ et $Q = \frac{125\pi^2}{4} \frac{E}{c^2}$: les ordonnées des points situés à $\frac{1}{2}$ et à $\frac{3}{2}$ de AB , sont égales à f ; celle du point situé à $\frac{2}{2}$ est égale à $2f$, et celle du point situé à $\frac{4}{2}$ est nulle. Et ainsi des autres.

À longueur égale, le solide se courberait suivant la figure (1), sous un poids égal au quart de celui qui le courberait suivant la figure (3) du N^o précédent.

L'extrémité inférieure est maintenue
ou l'extrémité supérieure maintenue
dans la même verticale.

2^o Lorsque l'extrémité inférieure du solide est maintenue et l'extrémité supérieure maintenue dans la même verticale, l'équation du N^o 80 exprime l'équilibre de résistance à la flexion; or, comme cette équation se refuse à ce qu'on ait simultanément $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, il s'en suit que la flexion est impossible.

La direction de la charge est
distante de l'axe du solide.



3^o Mais si la force Q , au lieu d'agir précisément dans le sens de l'axe, en est distante d'une quantité $BM=f$, arbitraire qu'on voudra, alors l'équation du N^o 80 aura lieu et la valeur de y sera

$$y = f \sin. x \sqrt{\frac{Q}{2}};$$

or, cette valeur devant être nulle quand $x=0$, on aura $c\sqrt{\frac{Q}{2}} = 2K\pi$; d'où

$$Q = 4K^2 \pi^2 \frac{E}{c^2} \dots \dots (1) \quad y = f(1 - \cos. 2K\pi \frac{x}{c}) \dots \dots (2)$$

L'expression de y donne également $\frac{dy}{dx} = 0$, quand $x=0$ et quand $x=c$; par conséquent la tangente de la courbe à l'extrémité supérieure est verticale, aussi bien que la tangente à l'extrémité inférieure.

La figure répond à $K=1$ et $Q = 4\pi^2 \frac{E}{c^2}$: l'ordonnée du point situé à $\frac{1}{2}$ de AM , c'est-à-dire, la flèche de courbure est égale à $2f$; le poids Q est quadruple de celui qui courberait le solide, de la manière indiquée par la figure (1) du N^o 80.

Si l'on écrit $\frac{4}{2}c$, au lieu de c dans l'expression (1) de Q , on retombera sur la valeur qui se rapporte à la figure (3) de l'art. 1^{er}; ainsi le solide dont il s'agit actuellement et les $\frac{4}{2}$, à partir du bas, de celui qui est représenté dans cette fig. (1)

L'extrémité supérieure n'est plus maintenue dans la verticale de l'extrémité inférieure.



du N° 80, soit dans le même état d'équilibre.

4°. L'extrémité inférieure A du solide est encastrée; le poids Q est suspendu à une traverse CM qui forme invariablement un angle droit avec AB. Le poids tout en comprimant le solide dans le sens MA, tend à le fléchir et le rompre. Désignons par c et f l'abscisse et l'ordonnée extrêmes AB et BM, et par g la distance CM; l'équation de l'équilibre de résistance à la flexion sera $\alpha \frac{d^2y}{dx^2} = Q(f+g-y)$ et parce qu'on doit avoir $y=0, \frac{dy}{dx}=0$, quand $x=0$, l'intégration donnera

$$y = (f+g)(1 - \cos x \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}).$$

Mais il faut aussi que $y=f$ réponde à $x=c$; donc $\frac{g}{f+g} = \cos c \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}$; d'où

$$Q = \alpha \left[\frac{\cos \left(\cos \left(\frac{g}{f+g} \right) \right)}{c} \right]^2 \dots \dots (1) \quad y = g \frac{1 - \cos x \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}}{\cos c \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}} \dots \dots (2)$$

et

$$f = g \left(\frac{1}{\cos c \sqrt{\frac{Q}{\alpha}}} - 1 \right) \dots \dots (3)$$

On mettra dans l'expression de Q le plus petit des arcs dont le cosinus est égal à $\frac{g}{f+g}$, à moins que certains points du solide ne soient maintenus dans la verticale AB.

La flèche de courbure, produite par un poids donné est proportionnelle à CM. Le poids capable de produire une flèche de courbure, donnée, est en raison inverse du carré de la longueur du solide.

L'extrémité supérieure est encastrée et l'autre extrémité est liée par un poids agissant à distance de l'axe.



5°. Supposons enfin que le solide soit encastré par son extrémité supérieure et que le poids Q lui fasse éprouver une tension longitudinale, en même temps qu'il le fait plier; l'équation sera $\alpha \frac{d^2y}{dx^2} = Q(g-f+y)$. Soit c la base du système supérieur et, pour abréger $\frac{Q}{\alpha} = \gamma^2$, l'intégrale sera

$$g-f+y = C e^{\gamma x} + C' e^{-\gamma x}$$

Or, on doit avoir, au point A, $y=0, \frac{dy}{dx}=0$ et $x=0$, et au point M, $x=c, y=f$; donc $g-f = C+C', 0 = C-C', g = C e^{\gamma c} + C' e^{-\gamma c}$; d'où l'on tire

$$C = C' \frac{g}{e^{\gamma c} + e^{-\gamma c}}, \quad f = g \left(1 - \frac{2}{e^{\gamma c} + e^{-\gamma c}} \right), \quad y = g \left(1 - \frac{2}{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}} \right).$$

VIII. Après le N° 89.

Le solide est encastré à l'extrémité supérieure et chargé d'un poids à l'extrémité inférieure.

1°. Supposons le solide encastré à l'extrémité supérieure A et chargé du poids Q à l'extrémité inférieure M, le signe de la composante X changera et l'on aura à intégrer l'équation



$$d^2v - q^2 v du^2 = -p^2 u du^2;$$

Or, l'intégrale (Voyez, Lacroix, pag. 64) est $v = C e^{\frac{q^2 u}{p^2}} + C' e^{-\frac{q^2 u}{p^2}} + \frac{p^2}{q^2} u$, c'est-à-dire,

$$f - y = C e^{\frac{q^2 (c-x)}{p^2}} + C' e^{-\frac{q^2 (c-x)}{p^2}} + \frac{p^2}{q^2} (c-x) \dots \dots \dots (1)$$

Mais, au point A, on a $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; et, au point M, $x=c$, $y=f$,

donc $f = C e^{\frac{q^2 c}{p^2}} + C' e^{-\frac{q^2 c}{p^2}} + \frac{p^2}{q^2} c$, $0 = q (C e^{\frac{q^2 c}{p^2}} + C' e^{-\frac{q^2 c}{p^2}}) + \frac{p^2}{q^2}$; $0 = C + C'$;

d'où résulte $C' = -C$, $C = -\frac{p^2}{q^2 (e^{\frac{q^2 c}{p^2}} + e^{-\frac{q^2 c}{p^2}})}$, et

$$f = \frac{p^2}{q^2} \left(q e^{-\frac{q^2 c}{p^2}} - \frac{e^{-\frac{q^2 c}{p^2}} - e^{-\frac{q^2 c}{p^2}}}{e^{\frac{q^2 c}{p^2}} + e^{-\frac{q^2 c}{p^2}}} \right) \dots (2), \quad y = \frac{p^2}{q^2} \left[q x - \frac{e^{\frac{q^2 c}{p^2}} - e^{-\frac{q^2 c}{p^2}} - e^{\frac{q^2 (c-x)}{p^2}} + e^{-\frac{q^2 (c-x)}{p^2}}}{e^{\frac{q^2 c}{p^2}} + e^{-\frac{q^2 c}{p^2}}} \right] (3)$$

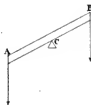
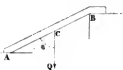
Solide incliné chargé entre ses extrémités.

2°. Les deux questions précédentes en renferment plusieurs autres : par exemple, celle d'un solide incliné AB, chargé en C, d'un poids Q, et supporté horizontalement à ses extrémités A et B. Ce solide n'a aucune tendance à glisser parce que le poids ne s'abattraient point par ce glissement. Soient c, c' les longueurs AC, BC; il est clair que les efforts exercés en A et B sont $Q \frac{c'}{c+c'}$, $Q \frac{c}{c+c'}$.

Chacune des parties AC, BC du solide pourra être regardée comme encastrée en C et sollicitée à son extrémité A ou B par une force égale et contraire à l'effort qui y répond. Or, la partie AC, qui sera comprimée dans le sens de sa longueur, se trouvera dans le même état que le solide considéré (N° 39), la force désignée par Q dans ce numéro, étant ici $Q \frac{c'}{c+c'}$; et la partie BC, qui sera tirée suivant sa longueur, se trouve dans le même état que le solide considéré (Art. 1°), la force désignée par Q dans cet article étant ici $Q \frac{c}{c+c'}$.

Il en serait de même du solide incliné AB, supporté par le point d'appui C, sur lequel il ne peut glisser, et chargé à ses extrémités A et B, de poids qui se font mutuellement équilibre, la partie BC, qui est comprimée, se trouve dans le même état que le solide du N° 39 et la partie AC, qui est étendue, se trouve dans le même état que le solide de l'article 1°.

Il en est encore de même du solide AB, chargé en C, d'un poids Q et appuyé, par l'extrémité inférieure A, contre un plan horizontal, et par l'extrémité supérieure B, contre un plan vertical. Mais l'extrémité A tendant à glisser doit être arrêtée par un plan vertical ou retenue par un tirant. Désignons par c, c', les longueurs AC, BC; par E l'angle ACD; par h, h', les résistances horizontales des appuis A et B et par g la résistance verticale de l'appui A; nous aurons $AD = c \sin E$, $AE = (c+c') \cos E$,



et les conditions de l'équilibre de situation seront, $h=h', g=g'$ et $Qc \sin \varepsilon = h'(c+c') \cos \varepsilon$; d'où

$$h' = Q \frac{c \tan \varepsilon}{c+c'}.$$

Quant à l'équilibre de résistance, chacune des parties AC, BC est dans le même état que si elle était encastrée en C et sollicitée à son autre extrémité, par les forces h, g ou par la force h' ; donc 1° la partie AC, qui est comprimée, s'affaiblit au solide du N° 89, les forces désignées par X, Y, Q dans ce numéro, ayant ici les valeurs respectives $h \sin \varepsilon + g \cos \varepsilon = Q \cos \varepsilon \left(1 + \frac{c \tan \varepsilon}{c+c'}\right)$, $g \sin \varepsilon - h \cos \varepsilon = \frac{c' \sin \varepsilon}{c+c'} \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{h^2 + g^2} = Q \sqrt{1 + \frac{c^2 \tan^2 \varepsilon}{(c+c')^2}}$; 2° la partie

BC, qui est pareillement comprimée, s'affaiblit au même solide, les forces X, Y, Q ayant les valeurs $h \sin \varepsilon = Q \frac{c \sin \varepsilon \tan \varepsilon}{c+c'}$,

$$h \cos \varepsilon = Q \frac{c \sin \varepsilon}{c+c'}, \sqrt{X^2 + Y^2} = h = Q \frac{c \tan \varepsilon}{c+c'}.$$

IX. Sur le N° 100.

1°. Pour déterminer la figure que dans le premier cas, le solide affecterait s'il fléchissait sous la charge P , on observera que $A \frac{ab^3 x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}} = A \frac{ab^3 x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}}$ étant (N° 50) le moment d'élasticité de la tige on quelconque pm et y l'ordonnée de la courbe affectée par le solide, l'équation d'équilibre (N° cité) devient

$$A \frac{ab^3 x^{\frac{3}{2}}}{12c^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dy}{dx^2} = Px; \quad d'm \frac{dy}{dx} = \frac{P}{A} \frac{14c^{\frac{3}{2}}}{ab^3} \left(x^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right), \quad y = \frac{P}{A} \frac{14c^{\frac{3}{2}}}{ab^3} \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{3} c^{\frac{3}{2}}\right) \text{ et}$$

$$f = \frac{P}{A} \frac{14c^{\frac{3}{2}}}{ab^3};$$

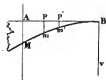
ainsi, l'abaissement du point extrême B est deux fois plus grand que toutes les sections du solide avaient la même hauteur b .

2°. Si le solide n'était chargé que de son propre poids, qui fût p pour l'unité de volume, alors x' et v' désignant l'abscisse et l'ordonnée d'un point m pris entre B et m , on aurait $p \int_0^x dx' (x-x') v' = \frac{B}{6} v'^3$. Différencions deux fois de suite par rapport à x , il viendra $p \int_0^x dx' v' = \frac{B}{6} \frac{dv'^3}{dx}$, $p v' = \frac{B}{6} \frac{dv'^3}{dx}$, équation dont l'intégrale

$$v = \frac{px^2}{12B}$$

exprime une parabole dont l'axe est Bv.

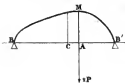
Il n'y a pas plus de difficulté lorsque les sections transversales du solide sont des cercles dont les plans se trouvent perpendiculaires à une même droite horizontale et les centres sur cette droite, quand ces sections sont des rectangles semblables, quand la loi



des longueurs ou des hauteurs est donnée &c.

Quant à la figure qu'affecterait dans la flexion le solide chargé sur tous les points de la longueur, on trouve, pour l'un et l'autre cas, des équations transcendantes qui donnent, en fin, pour $x=0$, résultats inadmissibles, comme contraires à l'hypothèse d'une flexion très-petite.

Solide posé sur deux appuis de niveau



3°. Lorsque le solide est posé horizontalement sur deux appuis B, B' et chargé en M d'un poids \mathcal{P} , on désignant par b la hauteur AM, au point de suspension du poids; par c le demi-intervalle CB des appuis et par γ la distance AC, on aura ---

$$B \frac{ab'}{6} = P \frac{c^3 - \gamma^3}{c}; \text{ d'où}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{6P(c^3 - \gamma^3)}{Bac}} \quad (3)$$

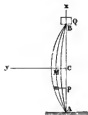
et les deux courbes BM, B'M seront des portions de paraboles dont l'axe commun est BB'.

Supposons que le poids \mathcal{P} pouvant être suspendu à un point quelconque de l'intervalle BB', le solide doive toujours résister à son action; l'ordonnée de la courbe de la face supérieure devra satisfaire à l'expression (3) de b , laquelle représente une ellipse dont le demi-petit axe est $\sqrt[3]{\frac{6Pc}{Ba}}$. Or, comme cette ellipse enveloppe les paraboles qui terminent le solide quand on donne au poids des situations particulières, il s'en suit que, par elle, le solide acquerra un axe de résistance partout ailleurs qu'au point où le poids est suspendu.

Si le solide était chargé de poids distribués uniformément sur la longueur, il devrait être terminé en dessus par deux faces planes et l'épaisseur au milieu serait donnée par l'expression (3) de b , N°. 100.

Et s'il n'était chargé que de son propre poids, il serait terminé en dessus par deux portions égales de paraboles, dont les axes seraient les verticales passant par les points d'appui. L'épaisseur au milieu serait $\frac{Pc^3}{aB}$, p étant le poids de l'unité de volume du solide et c le demi-intervalle des appuis.

Solide chargé de bout.



4°. Considérons en dernier lieu, un solide posé verticalement et chargé d'un poids Q sur l'extrémité supérieure, on admettant que toutes les sections transversales soient circulaires.

Désignons par c la demi-longueur AC=BC; par x, y les coordonnées Cp, pm de la courbe que l'axe affecte; par ξ la flèche CM de cette courbe et par r le rayon de la section transversale en m.

Supposons que le solide ne prenne qu'une petite courbure

à l'instant où il est prêt de se rompre, nous pourrions simplifier la question en assimilant cette courbure à celle d'un arc de parabole dont l'équation serait $y = f(1 - \frac{x^2}{c^2})$; alors nous aurons $B \frac{\tau^3}{4} = Qy$, ou

$$\tau^3 = \frac{4Qf}{\pi B} (1 - \frac{x^2}{c^2}).$$

Le solide sera donc d'égale résistance, pourvu que τ soit proportionnel à $\sqrt[3]{c^2 - x^2}$. Le diamètre des sections diminue du milieu aux extrémités qui se terminent en pointe.

En consolidant convenablement les extrémités des solides qu'on met en œuvre, il est souvent utile de se rapprocher des formes d'égale résistance, lesquelles sont particulièrement propres au fer fondu et aux pièces soumises à des efforts dirigés perpendiculairement à la longueur. Quant aux pièces comprimées suivant la longueur, il convient, quand la longueur est grande par rapport à l'épaisseur, d'augmenter cette épaisseur vers le milieu; mais il faut toujours conserver aux extrémités des dimensions telles que la pression ne puisse les écraser. Il est même avantageux, dans beaucoup de cas, de donner à ces extrémités la forme d'une ombre, qui s'applique contre les plans entre lesquels le solide est contenu. Cette disposition tend à procurer au solide le surcroît de résistance qu'il acquiert quand les extrémités sont encastrées (Art. 3^e de la note VII).

X. Sur le N.^o 114.

C'est où le solide est chargé parallèlement à sa longueur.

1^o Les mêmes considérations s'appliquent encore aux cas de résistance à la flexion, traités, Art. 1^{er} et 2^o de la note VII et 1^{er} de la note VIII.

Dans le premier cas, on a $\frac{Q}{A_0}$ pour la compression des fibres, due à l'action Q et $\frac{\sqrt{2} Q g}{2 \cos c \sqrt{\frac{Q}{A_0}}}$ pour la plus grande compression provenant de la courbure du solide; d'où résulte

$$Q \left(\frac{1}{0} + \frac{\sqrt{2} Q g}{2 \cos c \sqrt{\frac{Q}{A_0}}} \right) = B' \dots \dots \dots (1)$$

et

$$\frac{Q}{ab^2} \left(b + \frac{6g}{\cos c \sqrt{\frac{Q}{A_0 b^2}}} \right) = B' \dots \dots \dots (2)$$

quand la section est un rectangle.

Dans le second cas, $\frac{Q}{A_0}$ est l'extension commune à toutes les fibres et $\frac{\sqrt{2} Q g}{a}$, la plus grande extension due à la courbure; d'où

$$Q \left(\frac{1}{0} + \frac{\sqrt{2} Q g}{a} \right) = B' \dots \dots \dots (3)$$

et

$$Q \frac{b+6g}{ab^2} = B' \dots \dots \dots (4)$$

quand la section du solide est rectangulaire.

Enfin dans le troisième cas, les fibres sont d'abord allongées également par la composante parallèle à l'axe du solide et l'extension des fibres situées à la surface convexes augmente ensuite par l'effet de la courbure. On obtiendra toujours de la même manière l'équation qui détermine la limite cherchée et que nous nous dispenserons d'écrire, parce qu'elle est un peu compliquée.

Ces cas des solides courbes; et dans la figure est celle d'équilibre;

2°. Quant aux solides courbes, si la figure est celle qui convient à l'équilibre, le solide est simplement pressé suivant sa longueur et les dimensions de la section transversale étant généralement petites en comparaison de la longueur, on peut supposer la pression répartie également sur toute l'étendue de cette section. Ainsi T représentant la plus grande valeur de la pression, calculée par les formules des §§¹¹⁹ et suivants, on aura l'équation

$$\frac{T}{O} = B' \dots \dots \dots (1)$$

laquelle servira à établir le rapport convenable entre les dimensions du solide et la charge qui produit la pression.

3°. Dans la figure n'est pas celle d'équilibre.

3°. Si la figure du solide n'est pas celle qui convient à l'équilibre et que ce solide fléchisse par l'action des poids dont il est chargé, on obtiendra encore la limite de ces poids par les considérations déjà employées. D'abord, à raison de la pression T , dont les valeurs ont été indiquées (§§¹²⁶ et suivants), les fibres sont comprimées, dans toute l'étendue de la section, d'une partie $\frac{T}{AO}$ de leur longueur. Ensuite, par l'effet de la flexion, les fibres extrêmes sont comprimées d'une autre partie $\sqrt{\frac{d\varphi}{ds}}$ de leur longueur (§§¹²⁵); par conséquent, on aura l'équation

$$\frac{T}{O} + AV \sqrt{\frac{d\varphi}{ds}} = B' \dots \dots \dots (2)$$

qui fera connaître la limite cherchée.

Remarque sur l'application des formules propres à ce cas - exemple.

4°. On remarquera que la valeur de l'expression $\sqrt{\frac{d\varphi}{ds}}$, qui est l'une des quantités $\frac{V}{a} [X(b-y) + Y(a-x)]$, $\frac{V}{a} \int_a^b p(u-x) du$, ou leur somme, se trouvera positive ou négative, selon que, dans le point auquel cette valeur répond, la flexion aura augmenté ou diminué l'angle entre la normale de la courbe et l'axe des y ; mais qu'ici on ne doit pas avoir égard au signe de cette valeur et que c'est seulement la valeur absolue qu'il

font ajouter à celle de $\frac{T}{\Lambda_0}$: sur quoi l'on se rappellera que T a été supposé positif, quand il représentait une traction; on sait que cette valeur se trouvant négative, indiquera que le solide est étendu et non comprimé. Si la section transversale du solide, n'est pas susceptible de se partager en deux parties symétriques, par un axe perpendiculaire au plan de la flexion, V doit représenter la distance à l'axe d'élasticité (déterminé par la formule (a) du N°. 113) de la fibre qui est le plus comprimée, lorsque T est positif, et de la fibre qui est le plus étendue, lorsque T est négatif. Enfin la somme des valeurs absolues des quantités $\frac{T}{\Lambda_0}$ et $V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ sera donnée en fonction de l'abscisse x , et il est clair que l'on devra attribuer à x , dans cette fonction, la valeur qui la rendra la plus grande possible, dans toute l'étendue de la courbe.

Prevenons, par exemple, le solide considéré (N°. 117); la valeur de T étant positive dans toute l'étendue de la courbe, le solide est partout comprimé suivant sa longueur. Que dans la formule (j) du N°. 115, on remplace Y par $-R$ et X par sa valeur donnée (N°. 117), on verra que la valeur de $V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ est d'abord négative, qu'elle devient ensuite positive et se réduit à zéro, quand $x = a$. On ajoutera cette valeur, sans avoir égard à son signe, à celle de $\frac{T}{\Lambda_0}$ et réglant les valeurs de V et d conformément à la remarque précédente, on déterminera R par la condition que, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et a , la somme $\frac{T}{\Lambda_0} + V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, ne surpasse point $\frac{B'}{A}$.

Le solide considéré (N°. 118) est chargé seulement du poids $2pa$, se rapporte au cas de l'art. 2°; et si, en outre, il supporte le poids $2R$, on devra se tenir de la valeur de T indiquée dans ce N°. 118. Mais comme ce poids $2R$ produit seul la flexion du solide, la valeur de $V \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ sera la même qu'à-dessus et devra être employée de la même manière.

Stabilité des Voûtes.

Préliminaire.

Des premières recherches des
Géomètres sur l'équilibre des voûtes.

figure 1.



1°

figure 2.



Elles étaient purement spé-
culatives.

1) Les premières recherches des Géomètres sur la stabilité des voûtes ont eu pour objet la figure qui convient à l'équilibre particulier de chaque voûtoir. D'abord on faisant abstraction tant du frottement que de la cohésion et on supposant la voûte d'une épaisseur constante, mais infiniment petite, ils ont trouvé que si les éléments ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur, la figure est celle de la chaînette ou de la courbe que forme une chaîne pesante et parfaitement flexible, suspendue par ses extrémités à deux points fixes; et qu'en général, quelles que fussent les puissances appliquées aux éléments, la figure est celle de la courbe funiculaire, c'est-à-dire, de la courbe suivant laquelle se plierait une corde souple et inextensible, sollicitée par ces mêmes puissances; ce qu'on pouvait facilement prévoir, en observant que l'équilibre d'un système n'en subit pas moins, lorsque toutes les forces viennent à agir on tout directement contraires. Pour se rapprocher de l'état réel des choses, ils ont ensuite attribué à la voûte une épaisseur finie (Boutet, Académie, 1776-76) et ont cherché les relations entre les forces appliquées aux voûtoirs, la courbe d'intrados et la longueur du joint à un point quelconque; il en résulte que la loi des forces et l'une des courbes d'intrados ou d'extrados étant données, l'autre courbe ou la longueur du joint est déterminée, avec cette particularité que si les voûtoirs n'étaient soumis qu'à la seule action de la pesanteur, la tangente à la naissance de l'intrados est verticale, la longueur du joint y devient infinie. M^o. de Prony a fait voir (Architecture hydraulique, 1^{re} partie, page 161) comment on introduisant dans les conditions d'équilibre la considération du frottement sur les joints, l'infini disparaît de l'expression de la longueur des voûtoirs. La plupart de ces recherches ont été recueillies par M^o. Béard, dans l'ouvrage qu'il a publié, en 1810, sur la Statique des voûtes.

2) Les formules analytiques, déjà d'un ordre élevé, auxquelles conduit la condition de l'équilibre partiel, ne peuvent être

d'un grand secours à la pratique, quand même on y tiendrait compte du frottement et de la cohésion; parce que les formes de voûtes, qui en résultent, ou sont inexécutables ou s'éloignent trop de celles dont on fait usage et qui sont subordonnées soit à des circonstances locales soit à la facilité de la construction ou à d'autres convenances particulières.

Vritable manière d'embraser
la question; solution de Lahire.

3). C'est pourquoi les Géomètres ont embrassé la question sous un autre point de vue, indiqué d'ailleurs par l'observation: ne s'attachant plus à l'équilibre partiel, ils ont considéré comme un seul corps continu, plusieurs voûtes consécutives qui fussent stables entre eux, le fussent-ils inégalement, ce dont on ne peut contester la légitimité; et parce que, suivant l'observation, une voûte qui par sa constitution ne peut subsister d'elle-même, ou dont les pieds-droits sont trop faibles pour en soutenir la poutée, se fend vers les reins, ils ont regardé la partie supérieure comme un coin qui tend à écarter ou à renverser les parties inférieures et les pieds-droits dont ils obtenaient en conséquence les dimensions convenables à l'équilibre par la théorie du coin et celle du levier. Cette solution due à Lahire qui l'a exposée, en 1719, dans les mémoires de l'Académie, était d'une simplicité séduisante; elle a-t-elle été généralement admise jusqu'à ces derniers temps, par ceux qui se sont occupés de la même matière et elle a servi de base aux applications qu'ils ont faites des principes de la mécanique aux différentes questions concernant les voûtes.

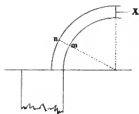
Défaute de cette solution

4). Néanmoins, la solution de Lahire porte sur deux hypothèses également gratuites; d'abord il n'est pas vrai en général que le plus faible d'une voûte se trouve au milieu des reins; la position des joints de rupture dépend tant de la forme que des dimensions de la voûte et varie avec ces éléments. Ensuite la partie supérieure n'agit que rarement comme un coin pour renverser les parties latérales; le frottement (sans parler de la cohésion) modifie l'action des voûtes et peut suffire pour les empêcher de glisser les uns sur les autres.

Principes de la méthode de
Coulomb; avantages et perfection
de cette méthode.

5). Dans son mémoire sur quelques problèmes relatifs à l'Architecture (Tome VII des ouvrages présentés à l'Académie), Coulomb s'étant proposé d'apprécier les hypothèses de Lahire, a cherché par la considération des maximum et minimum des limites des pressions horizontales que peut soutenir une

figure 3.



point de la clef, sans se rompre, une demi-voute dont la forme et les dimensions sont données et dont les voutoirs sont retenus par la cohésion et le frottement. Cet habile Ingénieur suppose la demi-voute divisée en deux parties par un joint quelconque, dont il détermine la position par la condition que la force appliquée à la clef et nécessaire pour empêcher la partie supérieure soit de descendre le long de ce joint, soit de tourner autour de son intrados, ait la plus grande valeur possible, ce qui donne deux maximum dont le plus grand est la limite inférieure cherchée. Déterminant ensuite la position du joint hypothétique, par la condition que la force appliquée à la clef et capable soit de faire monter la partie supérieure, le long de ce joint, soit de la faire tourner autour de l'extrados, ait la moindre valeur possible, il obtient deux minimum dont le plus petit est la limite supérieure demandée. La première limite constitue en même temps la plus grande pression ou la pression effective de la voute, tandis que le joint qui répond à cette pression, est le joint de rupture relatif et il est évident que la voute ne pourra subsister si cette première limite ne se trouve pas moindre que la seconde. Cette méthode très-ingénieuse et dirigée vers l'utilité pratique a l'avantage non seulement de bannir l'arbitraire tant de la position du joint de rupture, que du mode d'action des voutoirs, par conséquent de la valeur de la poussée; mais encore de conduire à une théorie aussi exacte que lumineuse, qui s'accorde avec les phénomènes réels et même les fait prévoir avec toutes leurs circonstances, pourvu que l'on considère les différentes positions que peut naturellement avoir la force qui se produit à la clef, dans une voute complète, par l'action réciproque des deux moitiés l'une sur l'autre. Coulomb n'a pas développé la méthode; il s'est borné à quelques indications vagues qui la laissent imparfaite, et même à en juger par la remarque I du §XVIII de son mémoire, il paraît que les premières épreuves sur la rupture des voutes, épreuves rapportées dans la coupe des pierres de Frézier, l'auraient induit à se déshabiller de la généralité dans laquelle il avait d'abord conçu cette méthode.

Elle comprend les nouvelles théories fondées sur l'expérience et on recule l'imperfection.

6). Enfin les observations faites sur les grands ponts construits vers la fin du siècle dernier, et des expériences directes sur la rupture des voutes, ont constaté que, généralement parlant, les voutoirs d'une voute ne se comportent pas

comme des coins dont les actions réciproques se contre-balancent; mais que la voûte se partage effectivement en plusieurs parties continues qui agissent les unes sur les autres par des points d'appui, de la même manière que des leviers inflexibles et posés, assemblés à charnières; fait incontestable qui a été pris immédiatement pour base de théories que leurs auteurs présentent comme originales, la plupart sans citer Coulomb dont la méthode confirme ce fait fondamental et à qui appartient le principe essentiel, relatif à la détermination du joint de rupture.

Ces théories se fondent principalement sur les expériences de M.^r Borda, où les voûtes avaient constamment une épaisseur de $\frac{1}{16}$ de l'ouverture qui était de 8^{pi}; elles supposent, en conséquence, que des deux joints, savoir, celui de rupture, c'est-à-dire, de la plus grande pression et celui autour duquel cette force tend à faire tourner la partie supérieure, l'un ou l'autre se trouve toujours placé à la base de la voûte, ce qui n'est pas exact; de sorte que ces théories peuvent donner pour toutes des voûtes sujettes à se rompre et doivent, au moins sous ce rapport, être regardées comme defectueuses.

7). Il faut donc en revenir à la méthode de Coulomb, mais lui conserver sa généralité primitive et sur-tout considérer les différentes positions de la force appliquée à la clef, afin de ne laisser échapper aucun cas de rupture des voûtes et d'obtenir les conditions exactes et complètes de leur stabilité.

Nous tâcherons d'établir la théorie des voûtes a priori ou indépendamment de l'expérience qui ne saurait embrasser tous les cas, et par là d'affranchir du reproche d'incertitude et d'empirisme, cette partie essentielle de la science des constructions.

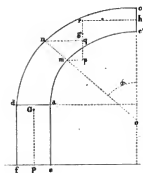
Pour plus de facilité nous imaginerons avec Coulomb un joint vertical, passant par le sommet de la voûte et qui la divise en deux parties égales. Cette hypothèse qui simplifie la question ne nuira nullement à l'exactitude.

L'objet qu'on se propose est le développement et l'application de cette méthode.

Exposition de la Théorie

Recherche des limites de la force qui peut être appliquée à la clef d'une demi-voute, tant qu'il y ait rupture.

figure 4.



8). Afin d'aller du simple au composé, nous ne considérons d'abord qu'une moitié de voute.

Soit donc a c c d le profil droit d'une demi-voute en berceau; on suppose que les courbes a c, c d de douelle et d'estrados sont données et que les joints tels que m n sont normaux à la première courbe; on fait abstraction de la longueur de la voute, ou l'on suppose cette longueur égale à l'unité linéaire: il s'agit d'assigner les limites de la force qui appliquée perpendiculairement au joint vertical c c', en un point donné h, pourra maintenir la demi-voute en repos, au égard au frottement et à la cohésion des joints.

Regardons les deux parties m n c c', m n d a séparées par le joint m n, chacune comme un seul corps continu et celle-ci comme inébranlable sur la base a d. Désignons par s la largeur du joint m n, par α l'angle qu'il fait avec la verticale, par p le poids de la partie supérieure m n c c', par φ l'angle du frottement, par γ la cohésion sur l'unité de surface et par X la force horizontale appliquée en h.

Deux conditions sont nécessaires au repos absolu du système; l'une qu'il n'y ait glissement sur aucun joint ni dans le sens n m ni dans le sens m n; l'autre qu'il n'y ait rotation, pour aucun joint, ni autour du point m ni autour du point n.

1^{re} Equations de la force pour le cas du glissement; limites de sa valeur.

9). 1^{re} Par rapport au glissement il est facile de voir que l'équation d'équilibre sera,

$$X \sin \alpha = p \cos \alpha \mp (p \sin \alpha + X \cos \alpha) \tan \varphi \mp \gamma s, \dots (1)$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu, selon que le corps m n c c' est prêt de glisser dans le sens n m ou dans le sens contraire m n. Cette équation donne, pour le premier cas,

$$X = \frac{p \cos (\alpha + \varphi) - \gamma s \cos \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)} \dots (2)$$

et pour le second,

$$X = \frac{p \cos (\alpha - \varphi) + \gamma s \cos \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} \dots (3)$$

expressions dans lesquelles p et s sont des fonctions données de α . Or, puisque par la construction même, il existe réellement dans la voute une suite de joints qui la divisent en voutelets et que la partie supérieure correspondante peut indifféremment

glisser sur chacun d'eux, il s'en suit qu'on obtiendra les limites demandées, en considérant, dans le premier cas, le joint auquel répond la plus grande valeur de X et dans le second cas, le joint qui se rapporte à la plus petite valeur de cette indéterminée; c'est-à-dire, que ces limites ne sont autre chose que le maximum G et le minimum g que comportent respectivement les expressions (2) et (3), envisagées comme des fonctions de λ , et il est clair que la voûte ne glissera sur aucun joint, ni dans un sens ni dans l'autre, si l'on donne à X une valeur qui ne soit pas moindre que G et ne surpasse point g .

2^e. — Equilibre de la force pour le cas de la rotation; limites de sa valeur.

10). 2^e. Quant au mouvement de rotation, on désignant par x la distance horizontale mp ou nq du centre de gravité g , de mnc' au point m ou n , et par y la distance verticale pr ou qr de la direction de X aux mêmes points; comme le moment de la cohésion du joint par rapport à ces points, est également $\frac{1}{2} \gamma s^2$, on trouve sans difficulté que l'équation d'équilibre donne relativement au point m ,

$$X = \frac{px - \frac{1}{2} \gamma s^2}{y} \dots \dots \dots (4)$$

et relativement au point n ,

$$X = \frac{px + \frac{1}{2} \gamma s^2}{y} \dots \dots \dots (5)$$

expressions dans lesquelles les variables p, x, y et s sont des fonctions données de l'angle λ . Soit F le maximum de la première et f le minimum de la seconde; il est évident que, pour aucun joint, la voûte ne tournera autour de l'un ou l'autre point m, n , pourvu que X ne soit pas au-dessous de F ni au-dessus de f .

Cas d'impossibilité de l'équilibre; limites absolues dans le cas contraire.

11). Il suit de là 1^o que la stabilité de la voûte sera impossible non seulement si l'on n'a pas $G < g$ et $F < f$, mais encore $G < f$ et $F < g$, afin qu'une même grandeur puisse être comprise en même temps entre G, g et entre F, f ; ou, en un mot, la stabilité sera impossible, si la plus grande L des deux limites relatives G, F excède la plus petite l des deux g, f ; 2^o que, dans le cas contraire, les limites absolues de la force qu'on pourra appliquer on h , sans rompre la voûte, sont cette plus grande et cette plus petite limites satisfaisant à la condition que la première soit moindre que la seconde.

Expressions particulières de la force, quand la cohésion est négligée.

12). Lorsque pour favoriser la stabilité on néglige la cohésion, laquelle est réellement nulle dans les voûtes récemment construites, les expressions (2) et (3) se réduisent à

$$X = \frac{P}{\tan(\alpha \pm \varphi)} \dots \dots \dots (a),$$

et les expressions (4) et (5) à

$$X = \frac{P x}{y} \dots \dots \dots (b),$$

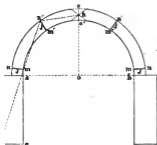
Nous désignerons encore par G, g, F, f les limites données par ces expressions réduites. On se souviendra que les signes + et - de l'expression (a) répondent au glissement dans les sens $n m$ et $m n$ respectivement, et que les variables x et y qui entrent dans l'expression (b) se rapportent au point m pour la limite F et au point n pour la limite f .

Remarque sur la position du joint appliquée à la clef.

13). Il est à remarquer que ni les deux positions du joint $m n$, auxquelles répondent le maximum G et le minimum g de la force X , ni les valeurs absolues de ces limites ne dépendent de la position du point d'application h sur le joint vertical cc' ; mais qu'il en est autrement des deux positions de ce joint, relatives aux limites F, f : ces positions, les valeurs respectives des limites et leur relation de grandeur dépendent de la position du point h sur cc' . Nous assignerons plus loin la position du point h , ce qui définira complètement la variable y , renfermée dans la formule (b).

Application de ces généralités à une voûte complète, abandonnée à elle-même.

figures 5 et 6.



14). Pour passer dans ces considérations abstraites à l'état réel des choses, représentons-nous une voûte cylindrique, complète, $a c b$, de forme quelconque, divisée au sommet, par le joint vertical cc' , en deux parties égales ca, cb , qui ne se touchent que par un seul point h de ce joint. Les limites de la force horizontale X qu'on pourrait appliquer au point h , sans rompre l'une ou l'autre demi-voûte, prise isolément, savoir, G, g pour le glissement, F, f pour la rotation, et les positions des points $I, i; J, j$ correspondantes à ces limites, seront données par les formules (a) et (b). Faisons en premier lieu abstraction du glissement, afin de n'avoir à considérer que les limites F, f et les deux joints J, j qui leur répondent. Supposons, pour un moment, que la voûte soit écharcée au-dessus et au-dessous du point h , de manière à permettre la rotation des deux parties supérieures $h m n$ ou $h m' n'$, autour de ce point, dans un sens ou dans l'autre, et imaginons que le système, d'abord soutenu, soit tout à coup abandonné à lui-même. Il se présente deux cas à discuter, selon que F n'existera pas ou existera f .

Dans le premier cas, il y aura stabilité si F est moindre que f et simple équilibre si F est égal à f ; car dès que le

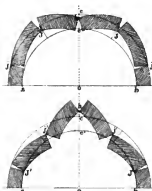
système est abandonné à lui-même, il se produit au point h , par l'action mutuelle des deux demi-voûtes l'une sur l'autre, une pression qui augmente par degrés, mais rapidement, depuis zéro jusqu'à la limite F qu'elle atteint nécessairement, puisque, par hypothèse, cette limite F n'excède pas $\frac{F}{2}$. C'est, 1° le maximum F , c'est-à-dire, la moindre force horizontale qu'il faille appliquer au point h , pour empêcher la partie supérieure à un joint, de tourner autour de l'intrados de ce joint, considérée la pression qui se produira effectivement au point h , par l'action réciproque des deux demi-voûtes, et le joint J relatif à F est celui de la plus grande pression ou de la pression effective en ce même point h ; il y aura donc réellement stabilité, quand F sera moindre que $\frac{F}{2}$ et seulement équilibre quand F égalera $\frac{F}{2}$. 2° les parties $h m n$, supérieures aux deux joints J , sont retenues sur ces joints, par la pression même F qu'elles exercent réciproquement l'une contre l'autre au point h ; 3° cette pression tend à renverser non seulement la partie $h m' n'$ supérieure au joint j , par un mouvement de rotation autour de l'intrados de ce joint, mais encore toute la demi-voûte $h e f$ par un semblable mouvement autour de l'arête extérieure $\frac{F}{2}$ de sa base. Tout cela se comprendra facilement, si l'on imagine au lieu des parties $h m n$, $m' n'$, $n' e f$ les leviers $h m$, $m n'$, $n' f$ articulés à charnières et chargés des poids de ces parties.

Dans le second cas, la pression effective qui se produira au point h , sera évidemment mesurée par la valeur de la limite $\frac{F}{2}$, laquelle valeur suffit à l'équilibre, et comme cette pression tend à s'accroître, puisqu'elle a virtuellement pour limite F qui, par hypothèse, surpasse $\frac{F}{2}$; il s'en suit que la voûte ne pourra se soutenir d'elle-même et se rompra. Quant au mode de rupture, il dépendra de la position respective des joints J, j , dont le premier doit s'ouvrir à l'extrados par l'effet de la rotation de la partie supérieure autour de son intrados, tandis que c'est le contraire pour le second j : selon que la disposition de ces joints sera $(\frac{J}{j})$ ou $(\frac{j}{J})$ la rupture s'opérera de manière que les deux points n (fig. 5) demeurant fixes et les deux m s'écartant l'un de l'autre, ou que les deux points m (fig. 6) demeurant fixes et les deux n se rapprochant l'un de l'autre, le point h s'abaîssera ou s'élèvera le long de la verticale oc , d'où il ne saurait sortir.

que deux autres parties de rupture; conditions de leur existence.

toute son étendue ce et on cal de rupture ou de simple équilibre, le point h , c'est-à-dire le point d'arcboutement des deux demi-voutes, ne sera susceptible que des deux situations extrêmes c et c' ; puisque, pour toute situation intermédiaire, il n'y aurait pas d'espace libre au-dessus ou au-dessous du point d'arcboutement; et que par conséquent la rotation autour de ce point serait tout-à-fait impossible.

figures 7 et 8.



Continuation de ces conditions.

Il est d'ailleurs évident que la position soit absolue soit relative des joints J, j et la grandeur des limites correspondantes F, f varient avec la situation du point h sur cc' ; conservons les notations J, j, F, f , pour la situation c , et désignons semblablement par J', j', F', f' les joints et les limites relatives, pour la situation c' ; la conclusion sera qu'il existe entre la situation du point h et la position respective des deux joints de maximum et de minimum, correspondants à cette situation, une certaine subordination ou conséquence de laquelle les états d'équilibre et parcellément les modes généraux de rupture se réduisent à deux: la situation c du point h exige la disposition ($\frac{J}{j}$) des deux joints, tandis que la situation c' requiert la disposition inverse ($\frac{j'}{J'}$).

16). N'importe ces dispositions ($\frac{J}{j}$) et ($\frac{j'}{J'}$) ne sont pas d'une nécessité absolue, c'est-à-dire que la disposition contraire ($\frac{j}{J}$), pour la situation c , ou ($\frac{J'}{j'}$), pour la situation c' , ne répugne pas absolument à la rupture de la voute; car le joint j , supposé au-dessus de J , ou le joint j' , supposé au-dessous de J' , pourrait être remplacé par un joint analogue, placé au-dessous de J ou au-dessus de J' ; par exemple, si F surpasse f , et j se trouve au-dessus de J , il existerait au-dessous, quelque joint c analogue à j , pour lequel la valeur de x , quoique plus grande que f , fût cependant encore moindre que F , il est clair que rupture n'en serait pas moins possible. Il faudra donc, quant aux dispositions $\frac{J}{j}, \frac{j'}{J'}$, considérer au lieu de ϕ minimum f, f' les moindres forces nécessaires pour faire tourner autour de l'extrémité des joints inférieurs à J et supérieurs à J' respectivement, forces que nous désignerons par F et F' .

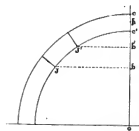
En agant ainsi on glissement; il y aurait trois autres modes de rupture.

17). Lorsqu'on admettra le glissement des voutoirs les uns sur les autres, on devra faire entrer les forces G, g relatives à cette circonstance physique, en comparaison avec les forces F, F', f, f' et les regarder comme appliquées aux mêmes points que celles avec lesquelles on les comparera. D'ailleurs, il est clair que la considération du glissement introduit avec elle trois nouveaux

modèle de rupture; 1° par glissement sur le joint i et simultanément par rotation autour de l'intrados de J , mais non de J' parce que les points en s'écartant par l'effet de ce glissement, les deux demi-voutes ne peuvent s'arc-bouter qu'en c ; 2° par glissement simultané sur les joints I, i ; 3° par glissement sur le joint I et en même temps par rotation autour de l'intrados du joint j ou j' ou du moins de quelque joint analogue, placé convenablement.

Voilà la disposition respective des joints auxquels répondent les limites pour la rotation.

figure 9.



Voilà la grandeur relative de ces limites.

Le plus grand des deux maximums ou le plus petit des deux minimums qui répondent aux points extrêmes. On joint verticalement le maximum au minimum relativement à tous les points de ce joint.

18). La position respective des deux joints J, J' ou des deux j, j' est généralement déterminée; en effet, la force appliquée en c' et dont le moment équivaudrait à celui de F est nécessairement moindre que F' ; réciproquement, la force appliquée en c et dont le moment équivaudrait à celui de F' est moindre que F ; c'est-à-dire qu'on a

$$F \frac{bc}{bc'} < F', \quad F' \frac{b'c'}{b'c} < F \dots \dots (6)$$

et en multipliant ces inégalités membre à membre, $bc \cdot b'c' < bc' \cdot b'c$; d'où, à cause de $bc = cc' + bc'$ et $b'c = cc' + b'c'$, l'on tire $b'c' < bc'$. Le joint J' est donc toujours au-dessus du joint J , et l'on démontre semblablement qu'au contraire le joint j' est toujours au-dessous du joint j ; on voit que les dispositions de ces joints sont généralement

$$\left(\frac{J'}{J}\right), \left(\frac{j}{j'}\right) \dots \dots (7)$$

19). Des inégalités (6) et de leurs analogues, il résulte immédiatement qu'on a aussi en général

$$F < F', \quad f < f' \dots \dots (8)$$

20) Comme on supposant que le point h (fig. 5 et 6) passe progressivement de c en c' , le joint J arrive par degrés en J' ; de même la valeur de F se rapproche graduellement de celle de F' ; donc à moins qu'il n'y ait maximum ou minimum entre c et c' , la plus grande des deux valeurs F et F' diminue continuellement jusqu'à la plus petite. Or soit $c'h = x$, les conditions de l'existence d'un maximum ou minimum seront, réductions faites,

$$\frac{dX}{dx} = y \frac{d(px)}{dx} = 0 \dots (1) \quad \frac{dX}{dz} = -px = 0 \dots (2)$$

puisque l'expression de y a généralement la forme $f(x) + x$; mais il n'en existe pas entre c et c' , ce qui résulte de la discussion de ces équations. Donc la plus grande des deux valeurs F et F' est le plus grand de tous les maximums

de la force X , correspondant aux diverses situations du point h sur cc' . Paraillement, la plus petite des deux valeurs ξ et ξ' est le moindre des minimum de la force X .

Clini, le maximum et le minimum de X , relatifs à une situation de h entre c et c' seront compris respectivement entre F, F' et ξ, ξ' ; de même que les joints correspondants tomberont entre J, J' et j, j' . Pour cette situation et avec une valeur égale ou à ce maximum ou à ce minimum, la force X ou empêchera la rotation autour de l'intrados ou ne pourra faire tourner autour de l'extrados d'un joint quelconque, la partie supérieure à ce joint; car tout autre joint que celui auquel répond cette valeur exigerait ou une moindre force ou une plus grande.

Distinction entre le moment du plus grand pression et le plus grand moment de pression.

21). Pour un même point h , il y a bien identité entre le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression, pris par rapport à un joint de la base de la demi-voute; car, puisque le bras de levier de la force horizontale X est donné et constant, le moment de cette force devient un maximum en même temps qu'elle; mais il n'en est plus de même quand on passe d'un point h à un autre et qu'on varie la force F soit moindre que la force F' , cependant le moment de la première qui a un bras de levier plus grand, peut surpasser celui de la seconde, ce qui donne lieu de distinguer entre le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression.

Le plus grand des deux moments par rapport à la base du pied-droit; qui répondent aux points extrêmes du joint vertical, est le maximum relatif à tous les points de ce joint.

22). Soit toujours $c'h = z$ et désignons par B la hauteur du pied-droit; le moment de la force X appliquée au point h , par rapport à la base du pied-droit, sera

$$m = px \frac{B + r + z}{y} \dots \dots (1)$$

et le maximum ou minimum de ce moment dépendra de l'équation

$$\frac{dm}{dz} = (h + r + z) \left[y \frac{d(px)}{dz} - px \frac{dy}{dz} \right] = 0 \dots (2), \quad \frac{dm}{dz} = px \left[y - (h + r + z) \right] = 0 \dots (3)$$

or, il n'en existe pas entre c et c' , ce qu'on voit par la discussion de ces équations; d'où il suit que le plus grand des deux moments correspondants à ces points est le maximum relatif.

De la position de la voûte et du joint de rupture dans le cas de la stabilité.

23). Lorsque la voûte se soutiendra d'elle-même et se trouvera à l'état de stabilité, la pression naturellement produite au joint vertical cc' , et dans laquelle consiste la poussée de la

vûte, se distribuera sur toute l'étendue de ce joint, du moins si l'appareil est bien calculé; elle se concentrera en un point intermédiaire à c et c' et alors ne sera autre que le maximum de la force X appliquée à ce point et considérée comme devant empêcher soit le glissement soit la rotation, maximum qui, pour le second cas, aura les propriétés énoncées (16. 20). Mais parce qu'on ne connaît pas la loi de cette distribution et que par l'imperfection inévitable dans l'exécution des joints, l'un ou l'autre des points c et c' aut-mêmes peut devenir celui d'arc-boutement des deux moitiés de la voûte, il conviendra, en supposant la force G appliquée en c , de prendre toujours pour la pression effective, celle des trois limites G, F, F' , dont le moment par rapport à l'arête extérieure de la base, sera le plus grand. En conséquence, le joint relatif I, J ou J' sera pour nous celui de la poutre de la voûte; nous le nommerons particulièrement joint de rupture (*).

De leur détermination.

24). Ainsi, pour avoir la valeur de la poutre, on cherchera tel maximum G, F, F' de la force X , relativement soit au glissement, soit à la rotation, en supposant dans le second cas, cette force appliquée successivement en c et c' , et l'on prendra celui des trois maximum dont le moment sera le plus grand, pour la poutre P de la voûte; la valeur relative de λ déterminera en même temps la position du joint de rupture.

Comparaison entre les grandeurs relatives des limites qui se rapportent à la rotation et les diverses dispositions des joints correspondantes à ces limites.

25). De ce que l'on a en général (16. 18) $(\frac{J}{J})$ et $(\frac{J'}{J'})$ il suit que des deux dispositions $(\frac{J}{J}), (\frac{J'}{J'})$ convenables à la rupture, l'une exclut nécessairement l'autre, et que par conséquent les dispositions des joints ne comportent que ces trois combinaisons

$$(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}), (\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}), (\frac{J'}{J'}, \frac{J'}{J'});$$

d'ailleurs les relations de grandeur entre les limites auxquelles les joints répondent sont, pour les différentes dispositions, savoir

Dispositions convenables à la rupture.

$$(\frac{J}{J}); F < f, F = f, F > f \dots$$

Dispositions convenables à la rupture.

$$(\frac{J'}{J'}); F < f, F > f \text{ ou } = f.$$

$$(\frac{J'}{J'}); F < f, F = f, F > f \dots$$

$$(\frac{J'}{J'}); F < f, F > f \text{ ou } = f.$$

(*) Il est clair que si le joint relatif est marqué à l'intérieur ou à l'extérieur, l'arc-boutement résulterait au haut ou au bas du joint vertical, et que si l'on choisit des cind dans les cind, la pression se répartirait sur différents points de la largeur du ce joint.

Cela posé, observant qu'attendu la rotation virtuelle autour de l'entraîné de tout joint, produite par le poids de la partie supérieure, l'arc-boutement des deux demi-voutes, pourvu que l'appareil soit bien exécuté, s'établit d'abord au haut du joint vertical, mais qu'à cause d'un vice d'exécution, il peut se trouver primitivement au bas de ce joint; faisant attention que quand l'arc-boutement doit ensuite se déplacer, soit par l'effet de la compressibilité des matériaux, soit parce que la limite \mathfrak{F} serait surpassée par la limite F , ou \mathfrak{F} par F' , le premier de tous les joints à l'entraîné duquel la rotation s'opère est nécessairement j ou j' ; enfin excluant de la stabilité les cas incertains, c'est-à-dire, qui, par un défaut d'exécution, pourraient rentrer dans ceux d'équilibre ou de rupture, on est conduit par la discussion à ces résultats généraux, par rapport à la rotation :

Cas de stabilité par rapport à la rotation.

26). Les cas de stabilité sont

$$1^{\circ} \dots \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right)$$

quelles que soient d'ailleurs les relations de grandeur entre les différentes limites;

$$2^{\circ} \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F < \mathfrak{F}; \quad 3^{\circ} \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F' < \mathfrak{F}'$$

quelles que soient aussi les relations de grandeur entre les limites $F, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$, pour le premier de ces deux cas et entre les limites $F, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$, pour le second.

Dans cet état, l'arc-boutement, à cause de la compressibilité dont les matériaux sont toujours doués, pourra devenir intermédiaire à c et c' , si l'appareil est bien exécuté, sinon, l'arc-boutement pourra rester en c ou passer en c' ou devenir encore intermédiaire; mais il devra toujours être censé se trouver à celui de ces deux points, auxquels répondra le plus grand moment de pression (76.35).

Cas d'équilibre.

27). Les cas d'équilibre se réduisent à ces deux

$$1^{\circ} \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F = \mathfrak{F}; \quad 2^{\circ} \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F' = \mathfrak{F}'$$

quelles que soient encore les relations de grandeur entre les limites $F, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$, pour le premier cas, et entre les limites $F, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$, pour le second.

La rupture tend à s'opérer dans les deux cas, selon le premier et le second mode, respectivement.

Cas de rupture.

28). Les cas de rupture se réduisent pareillement à deux qui sont

$$1^{\circ} \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F > \mathfrak{F}; \quad 2^{\circ} \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F' > \mathfrak{F}'$$

quelles que soient toujours les relations de grandeur entre les limites F, F', F'' , pour le premier cas, et entre les limites F, F', F'' , pour le second.

La rupture s'opère respectivement dans les deux cas selon le premier et le second mode.

Conditions de stabilité de la voûte au rapport au glissement sur les rails et au rapprochement des pieds-droits.

29). Outre la condition de stabilité par rapport à la rotation, il en est une relative au glissement et qui consiste évidemment en ce que la plus grande des trois limites G, F, F' soit moindre que la force nécessaire soit pour faire glisser sur le joint i , soit pour faire tourner autour de l'extrados du joint j ou j' ou de quelque joint analogue, placé convenablement (25.19).

Et si la demi-voûte est portée par un pied-droit, il faudra encore pour la stabilité absolue que le plus grand moment de pression, par rapport à l'arête extérieure de la base de ce pied-droit, soit moindre que le moment du système, par rapport à la même arête.

Remarque sur les joints de rupture effectifs et sur la pression réellement exigée à la clef.

30). On remarquera que ceux des joints I, i , et J, j ou J', j' suivant lesquels la voûte tend à se rompre et celle des limites G et F ou F' qui représentent la plus grande pression n'auront une existence réelle et exclusive qu'autant que la voûte se trouvera dans un état très-peu différent de celui d'équilibre; car, autrement, la rupture pourra s'étendre à d'autres joints que ceux-là et la pression effectivement engendrée à la clef pourra ne pas atteindre la limite désignée. Par exemple, on faisant abstraction du glissement, si F surpasse F' et que le joint J soit au-dessus de j , il ne pourra s'engorger au sommet de la clef qu'une pression égale à F , puisque cette pression suffit pour faire tourner la partie supérieure au joint j autour de l'extrados de ce joint; cette pression, moindre que F , sera incapable d'empêcher la partie supérieure au joint J de tourner autour de l'intrados de ce joint; il y aura donc rupture à ces deux joints et parce qu'ils se rapportent l'un à un minimum l'autre à un maximum, la rupture s'étendra à ceux qui les avoisinent; de plus, il existera, en général, deux joints analogues à J , situés de part et d'autre et auxquels répondra en c , une pression de même grandeur que F ; ces joints collatéraux et tous ceux qu'ils comprennent entre le joint J seront dans le même cas de rupture que lui. Cette remarque s'accorde avec l'expérience; on observe que, lors de la rupture, plusieurs joints s'ouvrent extérieurement à l'endroit du joint J et intérieurement

Stabilité des Voûtes.

Préliminaire.

Des premières recherches des Géomètres sur l'équilibre des voûtes.

figure 1.



figure 2.



1) Les premières recherches des Géomètres sur la stabilité des voûtes ont eu pour objet la figure qui convient à l'équilibre particulier de chaque voutoir. D'abord on faisait abstraction tant du frottement que de la cohésion et on supposant la voûte d'une épaisseur constante, mais infiniment petite; ils ont trouvé que si les éléments ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur, la figure est celle de la chaînette ou de la courbe que forme une chaîne pesante et parfaitement flexible, suspendue par ses extrémités à deux points fixes; et qu'en général, quelles que fussent les puissances appliquées aux éléments, la figure est celle de la courbe funiculaire, c'est-à-dire, de la courbe suivant laquelle se plierait une corde triple et inextensible, sollicitée par ces mêmes puissances; ce qu'on pouvait facilement prévoir, en observant que l'équilibre d'un système n'en subsiste pas moins, lorsque toutes les forces viennent à agir ou sont directement contraires. Pour se rapprocher de l'état réel des choses, ils ont ensuite attribué à la voûte une épaisseur finie (Bossut, Académie, 1776-76) et ont cherché les relations entre les forces appliquées aux voutoirs, la courbe d'intrados et la longueur du joint à un point quelconque; il en résulte que la loi des forces et l'une des courbes d'intrados ou d'extrados étant données, l'autre courbe ou la longueur du joint est déterminée, avec cette particularité que si les voutoirs n'étaient soumis qu'à la seule action de la pesanteur, la tangente à la naissance de l'intrados est verticale, la longueur du joint y devient infini. M.^e de Prony a fait voir (Architecture hydraulique, 1^{re} partie, page 161) comment on introduisant dans les conditions d'équilibre la considération du frottement sur les joints, l'infini disparaît de l'expression de la longueur des voutoirs. La plupart de ces recherches ont été recueillies par M.^r Bérard, dans l'ouvrage qu'il a publié, en 1810, sur la Statique des voûtes.

Elles étaient purement spéculatives.

2). Les formules analytiques, déjà d'un ordre élevé, auxquelles conduit la condition de l'équilibre partiel, ne peuvent être

d'un grand secours à la pratique, quand même on y tiendrait compte du frottement et de la cohésion; parce que les formes de voûtes, qui en doivent, ou sont inexécutables ou s'éloignent trop de celles dont on fait usage et qui sont subordonnées soit à des circonstances locales soit à la facilité de la construction ou à d'autres convenances particulières.

Véritable manière d'imitation
la question; solution de Lahire.

3). C'est pourquoi les Géomètres ont envisagé la question sous un autre point de vue, indiqué d'ailleurs par l'observation: ne s'attachant plus à l'équilibre partiel, ils ont considéré comme un seul corps continu, plusieurs voûtes consécutives qui fassent stables entre eux, le fassent-ils inégalement; ce dont on ne peut contester la légitimité; et parce que, suivant l'observation, une voûte qui par sa constitution ne peut subsister d'elle-même, ou dont les pieds-droits sont trop faibles pour en soutenir la poutree, se fend vers les reins, ils ont regardé la partie supérieure comme un coin qui tend à écarter ou à renverser les parties inférieures et les pieds-droits dont ils obtiennent en conséquence les dimensions convenables à l'équilibre par la théorie du coin et celle du levier. Cette solution due à Lahire qui l'a exposée, en 1719, dans les mémoires de l'Académie, était d'une simplicité séduisante; aussi a-t-elle été généralement admise, jusqu'à ces derniers temps, par ceux qui se sont occupés de la même matière et elle a servi de base aux applications qu'ils ont faites des principes de la mécanique aux différentes questions concernant les voûtes.

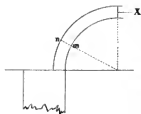
Défaute de cette solution

4). Néanmoins, la solution de Lahire porte sur deux hypothèses également gratuites; d'abord il n'est pas vrai en général que le plus faible d'une voûte se trouve au milieu des reins; la position des joints de rupture dépend tant de la forme que des dimensions de la voûte et varie avec ces éléments. Ensuite la partie supérieure n'agit que rarement comme un coin pour renverser les parties latérales; le frottement (sans parler de la cohésion) modifie l'action des voûtes et peut suffire pour les empêcher de glisser les uns sur les autres.

Principes de la méthode de
Coulomb; avantages et perfection-
née de cette méthode.

5). Dans son mémoire sur quelques problèmes relatifs à l'Architecture (Come VII des ouvrages présentés à l'Académie), Coulomb s'étant proposé d'apprécier les suppositions de Lahire, a cherché par la considération des maximum et minimum les limites des pressions horizontales que peut soutenir une

figure 3.



point de la clef, sans se rompre, une demi-voute dont la forme et les dimensions sont données et dont les voussoirs sont retenus par la cohésion et le frottement. Cet habile Ingénieur suppose la demi-voute divisée en deux parties par un joint quelconque, dont il détermine la position par la condition que la force appliquée à la clef et nécessaire pour empêcher la partie supérieure soit de descendre le long de ce joint, soit de tourner autour de son intrados, ait la plus grande valeur possible, ce qui donne deux maximum dont le plus grand est la limite inférieure cherchée. Déterminant ensuite la position du joint hypothétique, par la condition que la force appliquée à la clef et capable mis de faire monter la partie supérieure, le long de ce joint, soit de la faire tourner autour de l'extrados, ait la moindre valeur possible, il obtient deux minimum dont le plus petit est la limite supérieure demandée. La première limite constitue en même temps la plus grande pression ou la pression effective de la voute, tandis que le joint qui répond à cette pression, est le joint de rupture relatif et il est évident que la voute ne pourra subsister si cette première limite ne se trouve pas moindre que la seconde. Cette méthode très-ingénieuse et dirigée vers l'utilité pratique a l'avantage non seulement de bannir l'arbitraire tant de la position du joint de rupture, que du mode d'action des voussoirs, par conséquent de la valeur de la poussée; mais encore de conduire à une théorie aussi exacte que lumineuse, qui s'accorde avec les phénomènes réels et même les fait prévoir avec toutes leurs circonstances, pourvu que l'on considère les différentes positions que peut naturellement avoir la force qui se produit à la clef, dans une voute complète, par l'action réciproque des deux moitiés l'une sur l'autre. Coulomb n'a pas développé sa méthode; il s'est borné à quelques indications vagues qui la laissent imparfaite, et même à en juger par la remarque I du §XVIII de son mémoire, il paraît que les premières épreuves sur la rupture des voutes, épreuves rapportées dans la coupe des pierres de Freijor, l'auraient induit à se déshabiller de la généralité dans laquelle il avait d'abord conçu cette méthode.

On comprend les nouvelles théories fondées sur l'expérience et on s'écartera l'imperfection.

6). Enfin les observations faites sur les grands ponts construits vers la fin du siècle dernier, et des expériences directes sur la rupture des voutes, ont constaté que, généralement parlant, les voussoirs d'une voute ne se comportent pas

comme des coins dont les actions réciproques se contre-balancent; mais que la voûte se partage effectivement en plusieurs parties continues qui agissent les unes sur les autres par des points d'appui, de la même manière que des leviers inflexibles et potans, assemblés à charnières; fait incontestable qui a été pris immédiatement pour base de théories que leurs auteurs présentent comme originales, la plupart sans citer Coulomb dont la méthode conforme ce fait fondamental et à qui appartient le principe essentiel, relatif à la détermination du joint de rupture.

Ces théories se fondent principalement sur les expériences de M.^r Balthard, où les voûtes avaient constamment une épaisseur de $\frac{1}{16}$ de l'ouverture qui était de 8^{pi}: elles supposent, en conséquence, que des deux joints, savoir, celui de rupture, c'est-à-dire, de la plus grande pression et celui autour duquel l'extrados duquel cette force tend à faire tourner la partie supérieure, l'un ou l'autre se trouve toujours placé à la base de la voûte, ce qui n'est pas exact; de sorte que ces théories peuvent donner pour statels des voûtes sujettes à se rompre et doivent, au moins sous ce rapport, être regardées comme déficientes.

S'agit-il en se proposant de le développement et l'application de cette méthode.

7). Il faut donc en revenir à la méthode de Coulomb, mais lui conserver sa généralité primitive et sur-tout considérer les différentes positions de la force appliquée à la clef, afin de ne laisser échapper aucun cas de rupture des voûtes et d'obtenir les conditions exactes et complètes de leur stabilité.

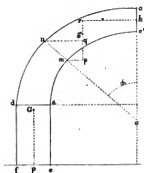
Nous tâcherons d'établir la théorie des voûtes à priori ou indépendamment de l'expérience qui ne saurait embrasser tous les cas, et par là d'affranchir du reproche d'incertitude et d'empirisme, cette partie essentielle de la science des constructions.

Pour plus de facilité nous imaginerons avec Coulomb un joint vertical, passant par le sommet de la voûte et qui la divise en deux parties égales. Cette hypothèse qui simplifie la question ne nuira nullement à l'exactitude.

Exposition de la Théorie

Recherche des limites de la force qui peut être appliquée à la clef d'une demi-voute, sans qu'il y ait rupture.

figure 4.



8). Afin d'aller du simple au composé, nous ne considérons d'abord qu'une moitié de voute.

Soit donc acc'd le profil droit d'une demi-voute en biseau; on suppose que les courbes ac', cd de douelle et d'extrados sont données et que les joints tels que mn sont normaux à la première courbe; on fait abstraction de la longueur de la voute, ou l'on suppose cette longueur égale à l'unité linéaire: il s'agit d'assigner les limites de la force qui appliquée perpendiculairement au joint vertical cc', en un point donné h, pourra maintenir la demi-voute en repos, ou égard au frottement et à la cohésion des joints.

Regardons les deux parties mncc', mnda séparées par le joint mn, chacune comme un seul corps continu et celle-ci comme inébranlable sur la base ad. Désignons par s la largeur du joint mn, par α l'angle qu'il fait avec la verticale, par p le poids de la partie supérieure mncc', par φ l'angle du frottement, par γ la cohésion sur l'unité de surface et par X la force horizontale appliquée en h.

Deux conditions sont nécessaires au repos absolu du système; l'une qu'il n'y ait glissement sur aucun joint ni dans le sens nm ni dans le sens mn; l'autre qu'il n'y ait rotation, pour aucun joint, ni autour du point m ni autour du point n.

1^{re} Expression de la force pour le cas du glissement; limites de sa valeur.

9). 1^{re} Par rapport au glissement il est facile de voir que l'équation d'équilibre sera,

$$X \sin \alpha = p \cos \alpha \mp (p \sin \alpha + X \cos \alpha) \tan \varphi + \gamma s, \dots (1)$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu, selon que le corps mncc' est prêt de glisser dans le sens nm ou dans le sens contraire mn. Cette équation donne, pour le premier cas,

$$X = \frac{p \cos (\alpha + \varphi) - \gamma s \cos \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)} \dots (2)$$

et pour le second,

$$X = \frac{p \cos (\alpha - \varphi) + \gamma s \cos \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} \dots (3)$$

cependant dans lesquelles p et s sont des fonctions données de α . Or, puisque par la construction même, il existe réellement dans la voute une suite de joints qui la divisent en voutelets et que la partie supérieure correspondante peut indifféremment

glisser sur chacun d'eux, il s'en suit qu'on obtiendra les limites demandées, en considérant, dans le premier cas, le joint auquel répond la plus grande valeur de X et dans le second cas, le joint qui se rapporte à la plus petite valeur de cette indéterminée; c'est-à-dire, que ces limites ne sont autre chose que le maximum G et le minimum g que comportent respectivement les expressions (2) et (3), envisagées comme des fonctions de α , et il est clair que la voûte ne glissera sur aucun joint, ni dans un sens ni dans l'autre, si l'on donne à X une valeur qui ne soit pas moindre que G et ne dépasse point g .

10. Équations de la force pour le cas de la rotation; limites de la valeur.

10). 2°. Quant au mouvement de rotation, en désignant par x la distance horizontale mp ou nq du centre de gravité g , de m ou cc' au point m ou n , et par y la distance verticale pr ou qr de la direction de X aux mêmes points; comme le moment de la cohésion du joint par rapport à ces points, est également $\frac{1}{2} \gamma s^2$, on trouve sans difficulté que l'équation d'équilibre donne relativement au point m ,

$$X = \frac{px - \frac{1}{2} \gamma s^2}{y} \dots \dots \dots (4)$$

et relativement au point n ,

$$X = \frac{px + \frac{1}{2} \gamma s^2}{y} \dots \dots \dots (5)$$

expressions dans lesquelles les variables p, x, y et s sont des fonctions données de l'angle α . Soit F le maximum de la première et f le minimum de la seconde; il est évident que, pour aucun joint, la voûte ne tournera autour de l'un ou l'autre point m, n , pourvu que X ne soit pas au-dessous de F ni au-dessus de f .

Cas d'impossibilité de l'équilibre; limites absolues dans le cas contraire.

11). Il suit de là 1°. que la stabilité de la voûte sera impossible non seulement si l'on n'a pas $G < g$ et $F < f$, mais encore $G < f$ et $F < g$, afin qu'une même grandeur puisse être comprise en même temps entre G, g et entre F, f ; ou, en un mot, la stabilité sera impossible, si la plus grande I des deux limites relatives G, F excède la plus petite i des deux g, f ; 2°. que, dans le cas contraire, les limites absolues de la force qu'on pourra appliquer on la, sans rompre la voûte, sont cette plus grande et cette plus petite limites satisfaisant à la condition que la première soit moindre que la seconde.

Expressions particulières de la force, quand la cohésion est négligée.

12). Lorsque pour favoriser la stabilité on néglige la cohésion, laquelle est réellement nulle dans les voûtes récemment construites, les expressions (2) et (3) se réduisent à

$$X = \frac{P}{\tan(\alpha \pm \varphi)} \dots \dots \dots (a),$$

et les expressions (4) et (5) à

$$X = \frac{Px}{y} \dots \dots \dots (b),$$

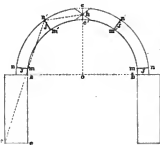
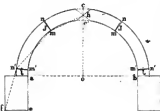
Nous désignerons encore par G, g, F, f les limites données par ces expressions réduites. On se souviendra que les signes + et - de l'expression (a) répondent au glissement dans les sens $n m$ et $m n$ respectivement, et que les variables x et y qui entrent dans l'expression (b) se rapportent au point m pour la limite F et au point n pour la limite f .

Remarque sur la position du
in pris appliquée à la clef.

13). Il est à remarquer que ni les deux positions du joint $m n$, auxquelles répondent le maximum G et le minimum g de la force X , ni les valeurs absolues de ces limites ne dépendent de la position du point d'application h sur le joint vertical cc' ; mais qu'il en est autrement des deux positions de ce joint, relatives aux limites F, f : ces positions, les valeurs respectives des limites et leur relation de grandeur dépendent de la position du point h sur cc' . Nous assignerons plus loin la position du point h , ce qui définira complètement la variable y , renfermée dans la formule (b).

Application de ces généralités
à une voûte complète, abandon-
née à elle-même.

figures 5 et 6.



14). Pour passer dans ces considérations abstraites à l'état réel des choses, représentons-nous une voûte cylindrique, complète, $a c b$, de forme quelconque, d'intèr au sommet, par le joint vertical cc' , en deux parties égales ca, cb , qui ne se touchent que par un seul point h de ce joint. Les limites de la force horizontale X qu'on pourrait appliquer au point h , sans rompre l'une ou l'autre demi-voûte, prise isolément, savoir, G, g pour le glissement, F, f pour la rotation, et les positions des points $I, i; J, j$ correspondantes à ces limites, seront données par les formules (a) et (b). Faisons en premier lieu abstraction du glissement, afin de n'avoir à considérer que les limites F, f et les deux joints J, j qui leur répondent. Supposons, pour un moment, que la voûte soit échancrée au-dessus et au-dessous du point h , de manière à permettre la rotation des deux parties supérieures $h m n$ ou $h m' n'$, autour de ce point, dans un sens ou dans l'autre, et imaginons que le système, d'abord soutenu, soit tout à coup abandonné à lui-même. Il se présente deux cas à discuter, selon que F n'excèdera pas ou excèdera f .

Dans le premier cas, il y aura stabilité si F est moindre que f et simple équilibre si F est égal à f ; car dès que le

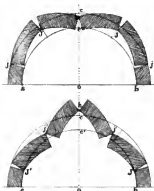
système est abandonné à lui-même, il se produit au point h , par l'action mutuelle des deux demi-voutes l'une sur l'autre, une pression qui augmente par degrés, mais rapidement, depuis zéro jusqu'à la limite F qu'elle atteint nécessairement, puisque, par hypothèse, cette limite F n'exécute pas \pm . Or, 1.^o le maximum F , c'est-à-dire, la moindre force horizontale qu'il faille appliquer au point h , pour empêcher la partie supérieure à un joint, de tourner autour de l'intrados de ce joint, constitue la pression qui se produira effectivement au point h , par l'action réciproque des deux demi-voutes, et le joint J relatif à F est celui de la plus grande pression ou de la pression effective en ce même point h ; il y aura donc réellement stabilité, quand F sera moindre que f et seulement équilibre quand F égalera f . 2.^o les parties hnm , supérieures aux deux joints J , sont retenues sur ces joints, par la pression même F qu'elles exercent réciproquement l'une contre l'autre au point h ; 3.^o cette pression tend à renverser non seulement la partie hmn supérieure au joint j , par un mouvement de rotation autour de l'intrados de ce joint, mais encore toute la demi-voute hef par un semblable mouvement autour de l'arête extérieure \pm de la base. Tout cela se comprendra facilement, si l'on imagine au lieu des parties hmn , $mn'm$, $n'ef$ les leviers hm , mn' , $n'f$ articulés à charnières et chargés des poids de ces parties.

Dans le second cas, la pression effective qui se produira au point h , sera évidemment mesurée par la valeur de la limite f , laquelle valeur suffit à l'équilibre, et comme cette pression tend à s'accroître, puisqu'elle a virtuellement pour limite F qui, par hypothèse, surpasse f ; il s'en suit que la voute ne pourra se soutenir d'elle-même et se rompra. Quant au mode de rupture, il dépendra de la position respective des joints J, j , dont le premier doit s'ouvrir à l'intrados par l'effet de la rotation de la partie supérieure autour de son intrados, tandis que c'est le contraire pour le second j : selon que la disposition de ces joints sera $(\frac{J}{j})$ ou $(\frac{j}{J})$ la rupture s'opérera de manière que les deux points n' (fig. 5) demeurant fixes et les deux m s'écartant l'un de l'autre, ou que les deux points m (fig. 6) demeurant fixes et les deux n' se rapprochant l'un de l'autre, le point h s'abaîssera ou s'élèvera le long de la verticale oc , d'où il ne saurait sortir.

que deux modes possibles de rupture; conditions de leur existence.

toute son étendue ce et on cal de rupture ou de simple équilibre, le point h , c'est-à-dire le point d'arcboutement des deux demi-voutes, ne sera susceptible que des deux situations extrêmes c et c' ; puisque, pour toute situation intermédiaire, il n'y aurait pas d'espace libre au-dessus ou au-dessous du point d'arcboutement; et que par conséquent la rotation autour de ce point serait tout-à-fait impossible.

figures 7 et 8.



Collection de ces conditions.

Il est d'ailleurs évident que la position soit absolue soit relative des joints J, j et la grandeur des limites correspondantes F, f varient avec la situation du point h sur cc' ; conservons les notations J, j, F, f , pour la situation c , et désignons semblablement par J', j', F', f' les joints et les limites relatives, pour la situation c' ; la conclusion sera qu'il existe entre la situation du point h et la position respective des deux joints de maximum et de minimum, correspondants à cette situation, une certaine subordination ou conséquence de laquelle les états d'équilibre et pareillement les modes généraux de rupture se réduisent à deux: la situation c du point h exige la disposition ($\frac{J}{j}$) des deux joints, tandis que la situation c' , requiert la disposition inverse ($\frac{j'}{J'}$).

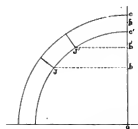
16). Néanmoins ces dispositions ($\frac{J}{j}$) et ($\frac{j'}{J'}$) ne sont pas d'une nécessité absolue, c'est-à-dire que la disposition contraire ($\frac{j}{J}$), pour la situation c , ou ($\frac{J'}{j'}$), pour la situation c' , ne répugne pas absolument à la rupture de la voute; car le joint j , supposé au-dessous de J , ou le joint j' , supposé au-dessous de J' , pourrait être remplacé par un joint analogue, placé au-dessous de J ou au-dessous de J' ; par exemple, si F surpasse f , et j se trouvait au-dessous de J , il existerait au-dessous, quelque joint c analogue à j , pour lequel la valeur de x , quoique plus grande que f , fût cependant encore moindre que F , il est clair que rupture n'en serait pas moins possible. Il faudra donc, quand aux dispositions $\frac{J}{j}, \frac{j'}{J'}$, considérer au lieu d'un minimum f, f' les moindres forces nécessaires pour faire tourner autour de l'extrémité des joints inférieurs à J et supérieurs à J' respectivement; forces que nous désignerons par F et F' .

En ayant égard au glissement; il y aurait lieu à trois autres modes de rupture.

17). Lorsqu'on admettra le glissement des voutures les uns sur les autres, on devra faire entrer les forces G, g relatives à cette circonstance physique, en comparaison avec les forces F, F', f, f' et les regarder comme appliquées aux mêmes points que celles avec lesquelles on les comparera. D'ailleurs, il est clair que la considération du glissement introduit avec elle trois nouveaux

De la disposition respective des joints auxquels répondent les limites pour la rotation.

figure 9.



De la grandeur relative de ces limites.

Le plus grand des deux maximums ou le plus petit des deux minimums qui répondent aux points extrêmes du joint vertical est le maximum ou le minimum relativement à tout les points du joint.

modèles de rupture; 1° par glissement sur le joint i et simultanément par rotation autour de l'intrados de J , mais non de J' parce que les points ia s'écartant par l'effet de ce glissement, les deux demi-voutes ne peuvent s'arc-bouter qu'en c ; 2° par glissement simultané sur les joints I, i ; 3° par glissement sur le joint I et en même temps par rotation autour de l'intrados du joint j ou j' ou du moins de quelque joint analogue, place convenablement.

18). La position respective des deux joints J, J' ou des deux j, j' est généralement déterminée; en effet, la force appliquée en c' et dont le moment équivaudrait à celui de F est nécessairement moindre que F' ; réciproquement, la force appliquée en c et dont le moment équivaudrait à celui de F' , est moindre que F ; c'est-à-dire qu'on a

$$F \frac{bc}{bc'} < F'; \quad F' \frac{b'c'}{bc} < F. \quad (6)$$

et en multipliant ces inégalités membre à membre, $bc \cdot b'c' < bc' \cdot b'c$; d'où, à cause de $bc = cc' + bc'$ et $b'c' = cc' + bc'$, l'on tire $b'c' < bc'$. Le joint J' est donc toujours au-dessus du joint J , et l'on démontre semblablement qu'au contraire le joint j' est toujours au-dessous du joint j ; on voit que les dispositions de ces joints sont généralement

$$\left(\frac{J'}{J}\right), \left(\frac{j}{j'}\right) \dots \dots \dots (7)$$

19). Des inégalités (6) et de leurs analogues, il résulte immédiatement qu'on a aussi en général

$$F < F'; \quad f < f' \dots \dots \dots (8)$$

20) Comme on supposant que le point h (fig. 5 et 6), passe progressivement de c en c' , le joint J arrive par degrés en J' ; de même la valeur de F se rapproche graduellement de celle de F' ; donc, à moins qu'il n'y ait maximum ou minimum entre c et c' , la plus grande des deux valeurs F et F' diminue continuellement jusqu'à la plus petite. Or soit $c'h = x$, les conditions de l'existence d'un maximum ou minimum seront, réductions faites,

$$\frac{dX}{dx} = y \frac{d(px)}{dx} = 0 \dots (1) \quad \frac{dX}{dz} = -px = 0 \dots (1)$$

puisque l'expression de y a généralement la forme $F(x) + x$; mais il n'en existe pas entre c et c' , ce qui résulte de la solution de ces équations. Donc la plus grande des deux valeurs F et F' est le plus grand de tous les maximum

de la force X , correspondant aux diverses situations du point h sur cc' . Parcelllement, la plus petite des deux valeurs \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' est le minimum des minimum de la force X .

Ainsi, le maximum et le minimum de X , relatif à une situation de h entre c et c' seront compris respectivement entre $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$; de même que les points correspondants tomberont entre J, J' et j, j' . Pour cette situation et avec une valeur égale ou à ce maximum ou à ce minimum, la force X ou empêchera la rotation autour de l'intrados ou ne pourra faire tourner autour de l'extrados d'un joint quelconque, la partie supérieure à ce joint; car tout autre joint que celui auquel répond cette valeur exigerait ou une moindre force ou une plus grande.

Distinction entre le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression.

21). Pour un même point h , il y a bien identité entre le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression, pris par rapport à un point de la base de la demi-voute; car, puisque le bras de levier de la force horizontale X est donné et constant, le moment de cette force devient un maximum ou même tend qu'elle; mais il n'en est plus de même quand on parle d'un point h à un autre et quoique la force \mathfrak{F} soit moindre que la force \mathfrak{F}' , cependant le moment de la première qui a un bras de levier plus grand, peut surpasser celui de la seconde, ce qui donne lieu de distinguer entre le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression.

Le plus grand des deux moments par rapport à la base du pied-droit, qui répondent aux points extrêmes du joint vertical, est le maximum relatif tournant à tous les points de ce joint.

22). Soit toujours $c'h = x$ et désignons par h la hauteur du pied-droit; le moment de la force X appliquée au point h , par rapport à la base du pied-droit, sera

$$m = px \frac{h+r+x}{y} \dots \dots (1)$$

et le maximum ou minimum de ce moment dépendra des équations

$$\frac{d m}{d x} = (h+r+x) \left[y \frac{d(px)}{d x} - px \frac{d y}{d x} \right] = 0 \dots (2), \quad \frac{d m}{d x} = px \left[y - (h+r+x) \right] = 0 \dots (3)$$

or, il n'en existe pas entre c et c' , ce qu'on voit par la discussion de ces équations; d'où il suit que le plus grand des deux moments correspondants à ces points est le maximum relatif.

De la position de la voûte et du joint de rupture dans le cas de la stabilité.

23). Lorsque la voûte se soutiendra elle-même et se trouvera à l'état de stabilité, la pression naturellement produite au joint vertical cc' , et dans laquelle consiste la poussée de la

voute, se distribuera sur toute l'étendue de ce joint, du moins si l'appareil est bien calculé; elle se concentrera en un point intermédiaire à c et c' et alors ne sera autre que le maximum de la force X appliquée à ce point et considérée comme devant empêcher soit le glissement soit la rotation, maximum qui, pour le second cas, aura les propriétés énoncées (N^o. 20). Mais parce qu'on ne connaît pas la loi de cette distribution et que par l'imperfection inévitable dans l'exécution des joints, l'un ou l'autre des points c et c' aut-mêmes peut devenir celui d'arc-boutement des deux moitiés de la voute, il conviendra, en supposant la force G appliquée en c , de prendre toujours pour la pression effective, celle des trois limites, G, F, F' , dont le moment par rapport à l'arête extérieure de la base, sera le plus grand. En conséquence, le joint relatif I, J ou J' sera pour nous celui de la poutre de la voute; nous le nommerons particulièrement joint de rupture (*).

De leur détermination.

24). Ainsi, pour avoir la valeur de la poutre, on cherchera tel maximum G, F, F' de la force X , relativement soit au glissement, soit à la rotation, en supposant dans le second cas, cette force appliquée successivement en c et c' , et l'on prendra celui des trois maximum dont le moment sera le plus grand, pour la poutre P de la voute; la valeur relative de δ déterminera en même temps la position du joint de rupture.

Comparaison entre les grandes relations des limites qui se rapportent à la rotation et les diverses dispositions des joints correspondantes à ces limites.

25). De ce que l'on a en général (N^o. 18) $(\frac{J}{J})$ et $(\frac{J'}{J'})$ il suit que des deux dispositions $(\frac{J}{J}), (\frac{J'}{J'})$ convenables à la rupture, l'une exclut nécessairement l'autre, et que par conséquent les dispositions des joints ne comportent que ces trois combinaisons

$$(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}), (\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}), (\frac{J'}{J'}, \frac{J'}{J'});$$

d'ailleurs les relations de grandeur entre les limites auxquelles les joints répondent sont, pour les différentes dispositions, savoir

Dispositions convenables à la rupture.

$$(\frac{J}{J}); \quad F < f, F = f, F > f \dots$$

$$(\frac{J'}{J'}); \quad F' < f', F' = f', F' > f' \dots$$

Dispositions convenables à la rupture.

$$(\frac{J}{J}); \quad F < f, F > f \quad \begin{matrix} \text{et } < \\ \text{ou } = \\ \text{ou } > \end{matrix} f.$$

$$(\frac{J'}{J'}); \quad F' < f', F' > f' \quad \begin{matrix} \text{et } < \\ \text{ou } = \\ \text{ou } > \end{matrix} f'.$$

(*) Il est clair que si les joints étaient tous unis ou à l'intérieur ou à l'extérieur, l'arc-boutement se réaliserait au haut ou au bas du joint central, et que si l'on cherchait des joints dans les vides, la pression se répartirait sur différents points de la largeur du joint.

Cela posé, observant qu'attendu la rotation virtuelle autour de l'intrados de tout joint, produite par le poids de la partie supérieure, l'arc-boutement des deux demi-voutes, pourvu que l'appareil soit bien exécuté, s'établit d'abord au haut du joint vertical, mais qu'à cause d'un vice d'exécution, il peut se trouver primitivement au bas de ce joint; faisant attention que quand l'arc-boutement doit en suite se déplacer, soit par l'effet de la compressibilité des matériaux, soit parce que la limite ξ serait surpassée par la limite F , ou ξ' par F' , le premier de tous les joints à l'intrados duquel la rotation s'opère est nécessairement j ou j' ; enfin excluant de la stabilité les cas incertains, c'est-à-dire, qui, par un défaut d'exécution, pourraient rentrer dans ceux d'équilibre ou de rupture, on est conduit par la discussion à ces résultats généraux, par rapport à la rotation :

Cas de stabilité par rapport à la rotation.

26). Les cas de stabilité sont

$$1^{\circ} \dots \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right)$$

quelles que soient d'ailleurs les relations de grandeur entre les différentes limites;

$$2^{\circ} \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F < \xi; \quad 3^{\circ} \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F' < \xi',$$

quelles que soient aussi les relations de grandeur entre les limites F, ξ, ξ' , pour le premier de ces deux cas et entre les limites F, ξ, ξ' , pour le second.

Dans cet état, l'arc-boutement, à cause de la compressibilité dont les matériaux sont toujours doués, pourra devenir intermédiaire à c et c' , si l'appareil est bien exécuté, sinon, l'arc-boutement pourra rester en c ou passer en c' ou devenir encore intermédiaire; mais il devra toujours être conduit se trouver à celui de ces deux points, auquel répondra le plus grand moment de pression (N. 25).

Cas d'équilibre.

27). Les cas d'équilibre se réduisent à ces deux :

$$1^{\circ} \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F = \xi; \quad 2^{\circ} \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F' = \xi'$$

quelles que soient encore les relations de grandeur entre les limites F, ξ, ξ' , pour le premier cas, et entre les limites F, ξ, ξ' , pour le second.

La rupture tend à s'opérer dans les deux cas, selon le premier et le second mode, respectivement.

Cas de rupture.

28). Les cas de rupture se réduisent pareillement à deux qui sont

$$1^{\circ} \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F > \xi; \quad 2^{\circ} \dots \dots \left(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'} \right) \text{ avec } F' > \xi';$$





quelles que soient toujours les relations de grandeur entre les limites F, F', F'' , pour le premier cas, et entre les limites F, F', F'' , pour le second.

La rupture s'opère respectivement dans les deux cas selon le premier et le second mode.

Condition de stabilité de la voûte par rapport au glissement sur les joints et au renversement de ses pieds-droits.

29). Outre la condition de stabilité par rapport à la rotation, il en est une relative au glissement et qui consiste évidemment en ce que la plus grande des trois limites G, F, F' soit moindre que la force nécessaire soit pour faire glisser sur le joint i , soit pour faire tourner autour de l'extrados du joint j ou j' ou de quelque joint analogue, placé convenablement (15.19).

Et si la demi-voûte est portée par un pied-droit, il faudra encore pour la stabilité absolue que le plus grand moment de pression, par rapport à l'arête caténaire de la base de ce pied-droit, soit moindre que le moment du système, par rapport à la même arête.

Remarque sur les joints de rupture effectifs et sur la pression réellement requise à la clef.

30). On remarquera que ceux des joints I, i , et J, j ou J', j' suivant lesquels la voûte tend à se rompre et celle des limites G et F ou F' qui représentent la plus grande pression n'auront une existence réelle et exclusive qu'autant que la voûte se trouvera dans un état très-peu différent de celui d'équilibre; car, autrement, la rupture pourra s'étendre à d'autres joints que ceux-là et la pression effectivement engendrée à la clef pourra ne pas atteindre la limite désignée. Par exemple, on faisant abstraction du glissement, si F surpasse F' et que le joint J soit au-delà de j , il ne pourra s'engendrer au sommet de la clef qu'une pression égale à F' , puisque cette pression suffit pour faire tourner la partie supérieure au joint j autour de l'extrados de ce joint; cette pression, moindre que F , sera incapable d'empêcher la partie supérieure au joint J de tourner autour de l'extrados de ce joint; il y aura donc rupture à ces deux joints et parce qu'ils se rapportent l'un à un minimum l'autre à un maximum, la rupture s'étendra à ceux qui les avoisinent; de plus, il existera, en général, deux joints analogues à J , situés de part et d'autre et auxquels répondra en c , une pression de même grandeur que F ; ces joints collatéraux et tous ceux qu'ils comprennent entre le joint J seront dans le même cas de rupture que lui. Cette remarque s'accorde avec l'expérience: on observe que, lors de la rupture, plusieurs joints s'ouvrent extérieurement à l'endroit du joint J et intérieurement

à l'endroit du joint j et que les premiers sont en plus grand nombre que les autres.

Circumstances qui présentent la rupture des voutes et que l'expérience a fait connaître.

31). Depuis 1773, il a été fait beaucoup d'observations et d'expériences sur la rupture des voutes (Lerouet, mémoire sur le cintrement et le décintement des ponts; Pauthoy, traité de la construction des ponts; Boistard, mémoires extraits de la bibliothèque des Ponts et chaussées, par M.^e Lebray, 2^e édition; Pondelet, art de bâtir; &c.); les expériences de M.^e Boistard, exécutées en grand, sur des voutes en brique, des principales formes utilisées dans la pratique, mais dont la même épaisseur de $\frac{1}{16}$ de l'ouverture sont les plus remarquables de toutes; la rupture y a constamment présenté les circonstances suivantes: la force du frottement est telle que la voute se rompt par un mouvement de rotation autour des arcs communs aux parties qui se séparent et non par un glissement sur les surfaces par lesquelles ces parties se touchent; lorsque la voute se trouve dans un état très-peu différent de celui d'équilibre, elle ne se brise généralement qu'en cinq endroits, savoir: le joint de la clef, deux joints placés de part et d'autre de la clef, entre elle et les naissances, et les joints des naissances, ou des bords des pieds-droits, si ceux-ci existent; enfin, on observe cette alternance, ou la partie supérieure s'abaisse et les parties inférieures s'écartent par en haut; alors le joint de la clef et ceux des naissances s'ouvrent à l'intérieur, tandis que les joints intermédiaires s'ouvrent à l'extérieur; ou bien la partie supérieure se soulève et les parties inférieures se rapprochent; pour lors l'ouverture des joints se fait précisément en sens inverse.

Déduit de la méthode employée, avec l'expérience.

32). Ordonne les modèles de rupture sont réellement tels que nous les avons établis a priori, et dans les voutes en brique des formes communément utilisées, le frottement des matériaux dont elles sont constituées, est effectivement capable de supporter au glissement sur les joints. Il est vrai que ces expériences placent le joint de rupture j ou J' à la naissance, mais il faut observer qu'elles ne concernaient que des voutes dont l'épaisseur était constante et égale à $\frac{1}{16}$ de l'ouverture.

De l'application des principes précédents aux principales questions concernant la statique des voutes.

33). Les principes exposés précédemment renferment la solution des questions relatives à la statique des voutes. Nous envisagerons d'abord ces questions d'une manière générale, en nous bornant aux plus importantes. Ensuite nous expliquerons par quelques exemples, une méthode simple et uniforme

pour appliquer les solutions générales, aux divers cas particuliers qui peuvent se présenter dans la pratique.

La figure et les dimensions générales d'une voûte résultent de la destination de l'édifice dont cette voûte fait partie : l'ouverture, la montée, la cintre de la voûte, l'épaisseur au sommet, la hauteur des pieds-droits, la grandeur et la distribution de la charge que la voûte doit porter, tout autant d'éléments donnés.

1^{re} Question.

Une voûte étant donnée, déterminer les joints relatifs aux limites et les valeurs de ces limites.

34). Une voûte étant donnée, déterminer les joints relatifs aux limites et les valeurs de ces limites.

Ce sont donc les positions des joints I, i, J, j et J', j' , ainsi que les valeurs des limites respectives G, g, F, f et F', f' qu'on demande, lesquelles se déterminent par le moyen des formules générales (a) et (b). Il faut se rappeler 1° que la formule (a) selon qu'elle est prise avec le signe + ou -, se rapporte au glissement dans le sens $n m$ ou $m n$ et donne respectivement le maximum G et le minimum g ; 2° que la formule (b) comprend quatre cas, selon que la force X est appliquée en c ou c' et qu'il s'agit de la rotation autour de m ou n , en sorte que p désignant le poids de la partie supérieure $m n c c'$ et x, y les bras de levier de p et de X par rapport à m et n , le maximum F et le minimum f répondent aux combinaisons $c m$ et $c n$, tandis que le maximum F' et le minimum f' répondent aux combinaisons $c' m$ et $c' n$.

Or comme la voûte est donnée, les quantités p et x, y , qu'il s'agit de soit du point c ou du point c' , soit du point m ou du point n pourront toujours être exprimées en fonctions de α . Cela fait, on substituera dans les formules, les expressions trouvées, on égalera à zéro la différentielle de chaque résultat, prise par rapport à α , et tirant de l'équation ainsi obtenue, la valeur de l'inconnue α , on aura l'un des joints cherchés.

Cette valeur reportée dans la formule fera connaître la limite relative à ce joint.

Observations sur la résolution de cette question.

35). La résolution de cette question donne lieu à plusieurs observations; 1° on ne sera pas obligé à tout ce calcul pour le second cas de la formule (a); car il est aisé de voir que le joint i est en général celui de naissance: il suffira donc

de substituer dans la formule, à la place de δ , l'angle d'inclinaison du joint de naissance et même, si ce joint est horizontal et que q désigne le poids de la demi-voute, il viendra tout de suite $g = q \tan \phi$; 2.^e la forme de l'expression de X étant en général $\frac{P}{Q}$, celle de l'équation de condition du maximum ou du minimum sera $Q \frac{dP}{dQ} - P \frac{dQ}{dQ} = 0$; d'où l'on déduit $\frac{dP}{dQ} - \frac{P}{Q}$. Ainsi l'on obtiendra également la limite cherchée, c'est-à-dire, le maximum ou le minimum de X , par la substitution de la valeur de l'inconnue δ , soit dans l'une soit dans l'autre fraction et l'on préférera celle des deux qui sera la plus simple. De plus, comme l'équation de condition est transcendante, puisque l'arc qui mesure l'angle δ y est mêlé avec les lignes trigonométriques, il faudra, pour la résoudre, recourir à la méthode des fautes positions; et si elle se trouvait absurde, ou n'était satisfaite que par une valeur de δ , sortant des limites 0 et $\frac{\pi}{2}$ de cette variable, alors il n'y aurait que maximum ou minimum relatif; 3.^e enfin, au lieu de chercher directement les maximum et minimum, on pourra opérer par tâtonnement, en supposant successivement à l'inconnue δ , dans l'expression $\frac{P}{Q}$, différentes valeurs prises de part et d'autre de la moyenne entre les deux extrêmes 0 et $\frac{\pi}{2}$, et calculant les valeurs de X correspondantes à celles qu'on aura attribuées à δ ; sur quoi l'on remarquera qu'il suffit d'avoir la valeur de l'angle δ , en nombre entier; parce que, par la propriété des maximum et minimum, la valeur respective de X n'éprouvera que très-peu de variation sur un autre grand développement du contour de la voute. C'est ce procédé qu'il faudra suivre lorsque l'équation de condition se trouvera trop compliquée. D'ailleurs, comme cette équation est généralement satisfaite par plusieurs valeurs de δ , ou qu'il existe en même temps plusieurs maximum et minimum, le procédé dont il s'agit, fera de lui-même distinguer les uns des autres, ainsi que le plus grand des maximum et le plus petit des minimum, soit absolu soit relatif, ce qui pourra quelquefois en composer la longueur.

2^{ème} Question.

Vérifier si une voute proposée se soutiendra d'elle-même.

36). Vérifier si une voute proposée se soutiendra ou non d'elle-même.

On déterminera les joints relatifs aux limites $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{F}'$, et $\mathcal{F}', \mathcal{F}'$ et les valeurs de ces limites, comme il a été expliqué dans la question précédente.

Cela posé, si, quant à la rotation, la condition $(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'})$ ou $(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'})$ avec $\mathcal{F} < \mathcal{F}'$, ou $(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'})$ avec $\mathcal{F}' < \mathcal{F}$ est remplie (N^o 18) et si, quant au glissement, la plus grande des trois limites $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{F}'$ est moindre que les forces $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{F}'$ (N^o 31), on sera certain que la voûte subsistera d'elle-même sur son plan de naissance; car il ne pourra y avoir ni rotation autour de l'extrados du joint j ou j' et à plus forte raison autour de l'extrados d'un autre joint quelconque, ni glissement sur le joint i et à plus forte raison sur tout autre.

Ensuite, la comparaison des forces $\mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{F}'$, multipliées par leurs bras de levier relatifs à l'arête antérieure de la base du pied-droit (et ici \mathcal{G} doit être censée appliquée au sommet de la clef) fera connaître le plus grand moment de pression. Ordonne, P et L désignant généralement la force et le bras de levier, qui sont les facteurs du plus grand moment, et M le moment de la demi-voûte et de son pied-droit, si l'on a $M > PL$, le système se soutiendra sur sa base, puis que déjà les parties supérieures ne peuvent se déverser et que de plus la poutre de la voûte sera incapable de renverser le pied-droit.

3^{ème} Question.

Déterminer les dimensions que les pieds-droits doivent avoir pour résister à la poutre de la voûte :

20.

37). Une voûte étant supposée stable sur son plan de naissance, déterminer les dimensions que son pied-droit doit avoir pour résister à la poutre.

Puisque, par hypothèse, la voûte est stable sur son plan de naissance, les conditions pour que la rotation et le glissement soient empêchés sont satisfaites; d'ailleurs elles ne cesseront pas de l'être lorsqu'on ajoutera des pieds-droits, puisque cette addition n'influe point sur les quantités $\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}', \mathcal{F}'$ ni sur la position des joints relatifs; il suffit donc de mettre le pied-droit en état de résister à la poutre de la demi-voûte.

Pour cela, PL étant le plus grand moment de pression, par rapport à l'arête antérieure de la base du pied-droit, et M le moment total de la demi-voûte, exprimé en fonction de la hauteur et de l'épaisseur de ce pied-droit,

on pourra l'équation

$$M = PL \dots \dots (n)$$

qui fera connaître l'une des dimensions, savoir, l'épaisseur E et la hauteur h du pied-droit, quand l'autre sera donnée.

Remarque sur la solution de cette question.

38). Lorsque les deux quantités e et h sont obligées et que le premier membre de l'équation est moindre que le second, alors il faut charger la voûte sur les reins par un mur suffisamment élevé et terminé au plan vertical partant par l'extrémité du joint auquel répond le plus grand moment de pression, ou du moins à une distance telle que ce joint n'en soit pas changé.

Les valeurs négatives que peut donner l'équation sont étrangères à la question matérielle et tiennent à des considérations abstraites d'équilibre.

4^{ème} Question.

Déterminer la résistance qu'il faut opposer à la partie inférieure, pour empêcher la voûte de glisser sur ses naissances.

39). Une voûte étant stable, à cela près qu'elle peut glisser sur ses joints de naissances, supposés horizontaux, déterminer la résistance qu'il convient d'ajouter à sa partie inférieure, pour empêcher cet effet.

Cette question se résout bien aisément: φ étant toujours l'angle du frottement, q le poids de la demi-voûte, abstraction faite du pied-droit et Q la plus grande pression, ou la plus grande des trois limites G, F, F' , on aura l'équation d'équilibre

$$Q = q \tan \varphi \dots (e)$$

Le poids q se composant des poids des parties supérieure et inférieure au joint de la plus grande pression, on exprimera ce dernier poids en fonction soit de la largeur du joint de naissance, si l'on veut faire varier cette largeur, ou de la hauteur d'un massif dont on pourrait charger ce joint; l'équation fera connaître la valeur de l'une ou de l'autre quantité, suffisante à l'équilibre.

Même remarque qu'à la solution.

40). Lorsqu'on voudra avoir égard à la cohésion, on ajoutera au second membre de l'équation le terme $Y's$, qui est le produit de la cohésion Y sur l'unité de surface, par l'aire s du joint de naissance, laquelle quantité s est aussi fonction de la largeur du joint.

Effet d'une surépaisseur sur la

41). On remarquera que le surcroît d'épaisseur de la voûte

naissance) ou d'un motif ajouté sur le pied-droit.

Valeurs générales des coefficients du frottement et de la cohésion.

over le joint de naissance, ou l'addition d'un motif porté par le pied-droit n'influera point sur la pression à la clef et par conséquent contribuera à la stabilité par rapport à la rotation du système autour de l'arête extérieure de la base.

42). On se rappellera aussi que tirant les expériences de M.^e Boitard (traité de la construction des ponts, par Gauthier), tome I, page 339) on a généralement $\tan \varphi = 0,76$, tandis que la cohésion est, par mètre carré, de 6960^{kg} pour les mortiers de chaux et sable et de 3700^{kg} pour les mortiers de chaux et ciment.

5^{ème} Question,

Une voûte étant donnée, assigner la pression que supporte un joint quelconque.

43). Une voûte étant donnée, assigner la pression que supporte un joint quelconque.

Q désignant la plus grande pression, ou la plus grande des limites G, E, F et p le poids de la partie supérieure au joint quelconque $m n$, il est aisé de voir que la pression normale N , éprouvée par ce joint sera

$$N = p \sin \alpha + Q \cos \alpha \dots (h)$$

Elle se réduit à Q pour le joint vertical et au poids de toute la demi-voûte, pour le joint de naissance, supposé horizontal.

Méthode pour appliquer la théorie aux Voûtes en berceau, dont le Cintre est circulaire.

Méthode pour appliquer la théorie aux voûtes les plus usitées.

44) Nous indiquerons une méthode simple et uniforme pour évaluer les quantités p et p_x en fonctions de α , dans tous les cas des voûtes en berceau, dont le cintre est circulaire, continu ou discontinu et qui soit extradosées parallèlement ou horizontalement ou en chape.

D'abord, comme la longueur de la voûte est indifférente et peut être supposée égale à l'unité linéaire, le poids de la demi-voûte ou d'une partie quelconque, comprise entre deux plans de joint, sera proportionnel à la surface de la partie correspondante du profil général.

Ensuite, pour ces différentes formes d'extrados, la partie $m n c c'$, supérieure au joint indéterminé $m n$, pourra être considérée comme la somme ou la différence de rectangles, triangles et secteurs dont un côté sera dans la verticale $o c$,

passant par le centre du profil et dont on aura à calculer en fonctions de δ , soit les surfaces, représentant des forces verticales, appliquées aux centres de gravité respectifs, soit les moments de ces forces par rapport à la verticale oc ou par rapport aux points m et n ; d'où l'on conclura immédiatement la quantité p et, par le principe des moments, la quantité px ou le moment de la partie mnc' .

Le calcul de la surface et du moment d'un rectangle ou d'un triangle ne présentera pas de difficulté; soit donc moc' un secteur dont le rayon $oc' = r$, la surface $\frac{1}{2} r^2 \delta$; que l'on imagine ce secteur décomposé par des rayons infiniment proches, en secteurs élémentaires, chacun de ceux-ci ayant son centre de gravité sur la ligne de milieu, aux deux tiers à partir du centre, il s'en suit que le centre de gravité du secteur total moc' , ne différera pas de celui de l'arc il décrit du centre o avec un rayon $= \frac{2}{3} ol$, c'est-à-dire que la distance δ de ce centre de gravité au centre o , sera quatrième proportionnelle à l'arc il , à la corde et à son rayon, ou quatrième proportionnelle à l'arc $mc' = r\delta$ du secteur, à la corde $2r \sin \frac{1}{2} \delta$ de cet arc et aux deux tiers de son rayon, ce qui donne

$$\delta = \frac{4r \sin \frac{1}{2} \delta}{3\delta}.$$

Prenez pour exemple la voûte en plein cintre: si elle est entradoyée parallèlement, la partie mnc' , supérieure au joint indéterminé mn , sera égale à la différence des secteurs onc et ome' ; de même le moment de mnc' , par rapport à tel point ou à telle ligne qu'on voudra, sera égal à la différence des moments de onc et ome' , pourvu qu'on donne aux bras de levier les signes convenables. Si la voûte est entradoyée de niveau, on aura $mnc' =$ le rectangle $nucn'$, plus le triangle onn' , moins le secteur ome' , et la même égalité algébrique entre les moments des poids représentés par ces surfaces. Enfin, si l'entradois est en chape, la surface $mtde'$ ou son moment équivaudra à la différence du triangle odt et du secteur ome' , ou de leurs moments.

Les mêmes considérations s'appliqueront aux voûtes surbaissées, ou arc de cercle ou en anse de panier.

Détermination de l'équilibre à la
chef d'une voûte.

45). Une condition essentielle à la solidité d'une voûte, c'est que la pierre dont elle est construite présente une résistance suffisante à la pression qu'elle éprouve. Nous avons vu (N. 43)

comment on évalue la pression exercée sur les joints d'une voûte; on la divisant par la surface du joint, on aura la pression qui répond à l'unité de surface et l'on pourra juger par-là si l'épave de pierre employée est capable de résister; sur quoi l'on observera que, d'après l'exemple des constructions, la pierre ne doit pas être soumise à une pression plus grande que $\frac{1}{3}$ du poids total lequel elle s'exerce dans les expériences; encore cette pression serait elle souvent trop forte, parce qu'il faut parer aux imperfections inévitables dans l'exécution des voûtes, aux défauts de la pierre et aux altérations que le temps fait éprouver aux matériaux.

La dureté de la pierre, la figure de la voûte, son ouverture, sa montée et son épaisseur sont des choses qui dépendent les unes des autres. En supposant une dureté moyenne, Perronet a donné pour trouver l'épaisseur des pleins cintres à entrées horizontales, une règle fondée sur l'observation: prendre $\frac{1}{12}$ de l'ouverture, y ajouter 1^{re} et de la somme retrancher 1^{re} par pied de l'ouverture. Cette règle est exprimée par la formule

$$e = \frac{5D + 46,777}{144} \dots\dots (E),$$

dans laquelle e désigne l'épaisseur et D le diamètre. Elle s'appliquera aux arcs de panier pourvu qu'on prenne au lieu de D le double du rayon de l'arc du sommet. Mais comme elle donne des épaisseurs trop fortes, dès que l'ouverture excède 30^m, il faudra, au-delà de ce terme, ainsi qu'à l'égard des autres genres de voûtes, se conformer à la pratique des constructeurs.

Recherche du moment de stabilité.

46). L'épaisseur que la théorie assigne aux pieds-droits d'une voûte, pour satisfaire à la condition de l'équilibre statique, serait très-insuffisante dans la pratique: les pierres ne sont pas assez dures pour pouvoir s'appuyer sur leurs arêtes, sans éclater, la cohésion de la maçonnerie n'est pas telle qu'un pied-droit puisse se briser tout d'une pièce en tournant autour de l'arête extérieure de sa base; il s'en faut bien que le sol de sa fondation soit parfaitement homogène et incompressible, et à ces circonstances se joignent encore une foule de causes accidentelles de destruction; il est donc absolument nécessaire d'augmenter l'épaisseur donnée par la théorie et le principe d'après lequel il paraît naturel de régler cette augmentation, c'est que le surcroît du moment de la résistance soit proportionnel au moment de la puissance. Ce surcroît qu'on peut appeler le moment de stabilité de la voûte se déterminera d'ailleurs

par l'expérience, on appliquant la théorie à des voutes occulées et dont la solidité ait été éprouvée par le tomb.

Or, la théorie de Lahire ayant été adoptée dès-longtemps par la plupart des constructeurs et même appliquée aux voutes surbaissées, moyennant quelques modifications; on a pu en prendre les résultats pour termes de comparaison.

Valeur du Coefficient de Stabilité
et pour les voutes au plein-cintre ou
surbaissées et entaillées horizontale-
ment.

47). De cette manière on a obtenu, pour les voutes de moyenne grandeur, en plein cintre ou surbaissées au tiers et entaillées de niveau, le coefficient de stabilité 1,9; on voit que la valeur de la poutée, donnée par la théorie, devra être multipliée par ce nombre, avant d'être introduite dans l'équation d'équilibre.

Le même coefficient 1,9 paraît convenir aussi pour les voutes surbaissées au quart et entaillées horizontalement.

48). Pour les pleins cintres entaillés
en chape.

On a déterminé le moment de stabilité des pleins cintres entaillés en chape, on les comparant aux magasins à poudres de Vauban, et il en résulte que pour donner à un pied-droit simple la même stabilité qu'à un pied-droit muni de contre-forts, le coefficient doit être 2 environ.

Ce coefficient 2 pourra être appliqué à toute grandeur de magasins ou de voutes à l'épreuve de la bombe.

De l'augmentation de l'épaisseur
aux reins avec l'ouverture des voutes
à l'épreuve de la bombe.

49). Avec l'épaisseur de 3^e aux reins de la voute, le magasin de Vauban est à l'épreuve, ainsi que l'expérience le constate; mais cette épaisseur doit augmenter en même temps que les dimensions du magasin: on pourrait déterminer l'augmentation par la théorie de la résistance des solides, comme s'il s'agissait de pièces continues, posées obliquement sur des appuis et chargées d'un poids égal; mais il vaudra mieux appliquer à cette détermination, les lois auxquelles sont soumises les amplitudes des vibrations des corps (Voyez Flapport et mémoire sur les poids suspendus, par Navier). Encore sera-t-il bon de vérifier si la différence $I - I'$ ou $I - P'$ est au moins égale à celle qui existe dans le magasin de Vauban.

De la largeur des fondations.

50). Ce que nous dirons de la largeur des fondations, à l'occasion des murs de revêtement s'appliquera ici, pourvu qu'on remplace la poutée des toits par la poutée de la voute.

Appendice.

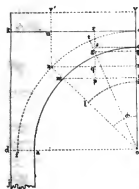
Application de la théorie aux principaux cas de la pratique.

De la voûte en plein cintre.

54). La voûte en plein cintre ou dont la douelle a pour profil droit une demi-circonférence du cercle, joint à la beauté de la forme l'avantage de la solidité et de la facilité de la construction; néanmoins elle n'est pas toujours celle qu'on choisit dans la pratique: lorsqu'il s'agit de ponts, par exemple, comme elle a l'inconvénient d'obtenir le passage des eaux, on lui préfère les voûtes turbaillées qui sous la même montée et la même ouverture offrent un plus grand débouché.

À l'inverse, on considère parallèlement; formules propres à ce genre.

figure 10.



55) Nous supposons d'abord que la voûte ait une épaisseur constante.

On aura $x=mp$ pour le point m , $x=nq$ pour le point n , quel que soit celui des points c, c' dont il s'agit; mais on aura $y=pr$ pour le point m , $y=qr$ pour le point n , quand il s'agit du point c et $y=ps$ pour le point m , $y=qs$ pour le point n , quand il s'agit du point c' ; à sera en parties du rayon des tables l'arc qui mesure l'angle moc' . Cette notation est générale. Soient $oc=r$, $oc=R$; la poids de la portion de couronne $m nec'$, différence des deux secteurs moe, noe , sera (N. 46)

$$p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \alpha \dots (1)$$

Le centre de gravité g de $m nec'$, se trouve ainsi que ceux des secteurs, sur la droite og qui divise l'angle moe en deux parties égales; il s'agit de déterminer la distance og . Le moment du secteur moe , par rapport à son centre (N. 46) est $\frac{2}{3} R^3 \sin \frac{1}{2} \alpha$; celui du secteur noe sera de même $\frac{2}{3} R^3 \sin \frac{1}{2} \alpha$; donc, par le principe des moments,

$$og = \frac{4(R^3 - r^3) \sin \frac{1}{2} \alpha}{3(R^2 - r^2) \alpha} \dots (2)$$

Or, à cause de $gg' = og \sin \frac{1}{2} \alpha$, on conclut

$$gg' = \frac{4(R^3 - r^3) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{3(R^2 - r^2) \alpha} \dots (3)$$

Maintenant, $mm' = r \sin \alpha$, $om' = r \cos \alpha$; $nn' = R \sin \alpha$, $on = R \cos \alpha$; de plus $mp = mm' - gg'$, $nq = nn' - gg'$ et $pr = oc - om'$, $qr = oc - on'$; $ps = oc' - om'$, $qs = oc' - on'$; par conséquent, les formules générales (a) et (b) donneront

$$X = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \frac{\partial}{\tan(\lambda + \varphi)} \dots (G), \quad X = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \frac{\partial}{\tan(\lambda - \varphi)} \dots (G')$$

$$X = \frac{3r(R^2 - r^2) \sin \lambda - 4(R^2 - r^2) \sin^2 \frac{1}{2} \lambda}{6(R - r \cos \lambda)} \dots (F'), \quad X = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \frac{\partial}{\tan \frac{1}{2} \lambda} - \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R} \dots (F'')$$

$$X = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \frac{\partial}{\tan \frac{1}{2} \lambda} - \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{r} \dots (F'''), \quad X = \frac{3R(R^2 - r^2) \sin \lambda - 4(R^2 - r^2) \sin^2 \frac{1}{2} \lambda}{6(r - R \cos \lambda)} \dots (F''')$$

Résultats de la dérivation des ces formules.

55). En dérivant ces expressions on trouve que si $\varphi = 37^\circ$, le maximum de la première répond à $\lambda = 16'$ environ, que la seconde et la quatrième ne comportent chacune qu'un minimum relatif, qui répond à $\lambda = \frac{\pi}{2}$; que la troisième est susceptible d'un maximum absolu, dépendant du rapport $\frac{R}{r}$; enfin, que, dans le cas actuel les deux derniers doivent être rejetés.

Formules définitives.

56). Substituant donc les valeurs de λ et celle de φ , égalant à zéro le coefficient différentiel de la fonction (F), puis observant qu'on peut prendre pour la valeur maximum de X , donnée par cette fonction, le rapport de la différentielle du numérateur à celle du dénominateur, et enfin posant $\frac{R}{r} = k$, on aura définitivement

$$G = 0,1161 \cdot r^2 (k^2 - 1) \dots (G), \quad G' = 0,5918 \cdot r^2 (k^2 - 1) \dots (G')$$

$$\left. \begin{aligned} k - \frac{2(k^2 - 1)}{3(k + 1)} &= \cos \lambda + (1 - k \cos \lambda) \frac{\partial}{\sin \lambda}, \dots \\ F &= r^2 \left[\frac{1}{4} (k^2 - 1) \left(1 + \frac{\partial}{\sin \lambda} \cos \lambda \right) - \frac{1}{2} (k^2 - 1) \right] \dots (F) \end{aligned} \right\}$$

$$f = r^2 \left[0,7854 \cdot (k^2 - 1) - \frac{1}{2} \frac{k^2 - 1}{k} \right] \dots (f)$$

Désignons par E et par h l'épaisseur et la hauteur du pied droit, de sorte que $L = R + h$ ou $L = r + h$; le moment de ce pied-droit par rapport à l'arête extérieure de la base sera $\frac{1}{2} h E^2$; posons $\lambda = \frac{\pi}{2}$ dans les expressions (1) et (2) afin qu'elles se rapportent à toute la demi-voute et remarquons que le bras de levier, par rapport à la même arête est $E + r - g'g'$, l'équation $M = PL$, deviendra

$$\frac{1}{2} h E^2 + \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) E + \frac{1}{2} \pi r (R^2 - r^2) - \frac{1}{2} (R^2 - r^2) = PL \dots (n)$$

Celles sont les formules propres à la voute en plein cintre d'une épaisseur constante.

L'équation (n) détermine l'une des quantités E et h par le moyen de l'autre, et comme la moindre épaisseur qu'on puisse donner au pied-droit est l'épaisseur même de la voute, si l'on voulait savoir quelle valeur de h répond à cette limite, on substituerait $R - r$ et $R + h$ ou $r + h$ au lieu de E et de L , dans cette équation qui n'en serait pas moins du premier degré en h et qui donnerait la valeur de cette quantité.

Cas où l'estrade est chargée d'une
matte de terre.

65). Il pourrait arriver que le plein cintre fût chargé d'une masse de terre, élevée jusqu'à un certain niveau vv' , au-dessus de la clef: alors il faudrait ajouter soit au poids soit au moment de la couronne de maçonnerie mnc' , le poids ou le moment de la masse de terre $ntcv'$, lequel équivaudra à celui du rectangle $nn'vv'$, plus celui du triangle onp' , moins celui du secteur ocn .

Plein cintre actuellement horizontal -
lement; formules particulières.

66). Considérons actuellement le plein cintre à estrade horizontal ck . Le pentagone $c'mnuc$ vaut le rectangle ou nn' , plus le triangle non' , moins le secteur $c'on$; soit encore $oc' = r$, $oc = R$ et l'angle $c'om = \alpha$, on aura $mm' = r \sin \alpha$, $nn' = R \sin \alpha$, $om' = r \cos \alpha$, $on' = R \cos \alpha$; les surfaces du rectangle, du triangle et du secteur s'exprimeront par $R^2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)$, $\frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\frac{1}{2} r^2 \alpha$; d'où

$$p = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} r^2 \alpha;$$

les distances des centres de gravité de ces surfaces à la verticale oc , seront respectivement $\frac{1}{2} R \sin \alpha$, $\frac{1}{2} R \sin \alpha$, $\frac{r \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{3 \sin \alpha}$, lesquelles retranchées soit de mm' , soit de nn' donneront les bras de levier relatifs au point m ou n et par le principe des moments on obtiendra directement le moment px .

D'ailleurs, on a toujours, par rapport au point c , $m'c = pr = R - r \cos \alpha$, $n'c = qr = R (1 - \cos \alpha)$ et par rapport au point c' , $m'c' = ps = r (1 - \cos \alpha)$, $n'c' = qs = r - R \cos \alpha$. Si donc, afin d'abréger, on pose $\frac{R}{r} = K$, il viendra

$$p = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \left[K^2 (1 - \cos \alpha) - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right],$$

et respectivement pour les points m et n ,

$$px = \frac{1}{2} r^3 \left\{ K^3 \sin^2 \alpha \left[6 - 3K - (3 - 2K) \cos \alpha \right] + 2(1 - \cos \alpha) - 3\alpha \sin \alpha \right\},$$

$$px = \frac{1}{2} r^3 \left\{ K^3 \sin^2 \alpha (3 - \cos \alpha) + 2(1 - \cos \alpha) - 3K \alpha \sin \alpha \right\};$$

d'où résulteront d'abord les expressions

$$X = \frac{px}{r(K - \cos \alpha)} \dots (1), X = \frac{px}{R(1 - \cos \alpha)} \dots (2) \text{ et } X = \frac{px}{r(1 - \cos \alpha)} \dots (3), X = \frac{px}{r(r - K \cos \alpha)} \dots (4),$$

selon que la force X résidera en c ou en c' .

Ensuite pour les deux (1) et (4) on fera immédiatement $\frac{dX}{d\alpha} = 0$, on développera et l'on réduira, après quoi l'on remplacera dans ces mêmes expressions $2(1 - \cos \alpha)$ par $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}$; mais pour les deux (2) et (3), on commencera par faire disparaître le dénominateur, en effectuant la division; puis l'on fera aussi $\frac{dX}{d\alpha} = 0$; on obtiendra ainsi les formules,

$$X = \frac{r^2 \sin \alpha}{2 \tan(\alpha + \varphi)} \left[K^2 (1 - \cos \alpha) - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right] \dots (5)$$

$$2K^2(3-2K)\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 6K^2(1+K-K^2)\cos^2\alpha + 3(1+4K^2-2K^4)\cos\alpha + 3(1-K)\cos\alpha \frac{d}{d\alpha} = 2K^2 - 6K^2 + 6K^2 + K + 2, \left. \begin{aligned} F &= \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6(K-\cos\alpha)} \left\{ K^2 \left[6-3K-(3-2K)\cos\alpha \right] + \frac{7}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} - 3 \frac{d}{\sin\alpha} \right\}, \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (F')$$

$$\frac{d}{\sin\alpha} - \frac{3}{2} K^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha = 1, \dots \dots \dots \left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{6} r^2 \left\{ K^2 \cos\alpha (2-\cos\alpha) - 6 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha \frac{d}{d\alpha} + 3K^2 + \frac{3}{K} \right\}, \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (F)$$

$$K^2 \cos\alpha \left[9-5K-(6-4K)\cos\alpha \right] + 3 \frac{d}{d\alpha} = K^2(3-K) + 3, \dots \dots \dots \left. \begin{aligned} F' &= \frac{1}{6} r^2 \left\{ K^2 \cos\alpha \left[3-K-(3-2K)\cos\alpha \right] - 6 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha \frac{d}{d\alpha} + 3K^2(2-K) + 2 \right\}, \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (F'')$$

$$2K^2 \cos^2 \alpha - 3K^2(1+K)\cos^2 \alpha + 3K^2(1+2K)\cos\alpha + 3K(K-\cos\alpha) \frac{d}{d\alpha} = 3K^2 - K^2 + 3K - 2, \left. \begin{aligned} f' &= \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6(1-K\cos\alpha)} \left[K^2(3-\cos\alpha) + \frac{7}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} - 3K \frac{d}{\sin\alpha} \right]; \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (F''')$$

Quant à l'équation (m), un moyen fort simple d'y parvenir, c'est de considérer le moment M comme composé des moments des rectangles a j, c d, moins celui du secteur a o c' et l'on a sur le champ,

$$\frac{1}{2} (h+R) E^2 + r(R - \frac{1}{2} \pi r) E + r^2 (\frac{1}{2} R + \frac{1}{3} r - \frac{1}{4} \pi r) = PL \dots \dots (m)$$

Les quantités P et L se rapportant ou au point c ou au point c'.

Cet où l'estrados est chargé d'une couche de maçonnerie, tome II.

57). Lorsque l'estrados horizontal sera chargé d'une couche de maçonnerie, de terre etc on aura égard à cette circonstance, en ramenant, pour plus de simplicité, cette couche à une autre de même densité que la maçonnerie de la voûte; mais alors il faudra renoncer aux équations de condition du maximum ou du minimum des expressions (a) et (b), parce qu'elles deviendraient trop compliquées. On verra, la maçonnerie qui couvre les reins et la clef doit être regardée comme indépendante de celle de la voûte proprement dite et comme elle récente pour être susceptible de se comprimer et de permettre aux voûtes inférieures d'obéir à l'action qu'elle exerce sur eux.

Soient ainsi entrainés en chape; formules particulières.

58). Un autre cas utile de la voûte ou plein cintre est celui où l'estrados est disposé en chape ou en dos d'âne.

figure 11.

Désignons par I l'inclinaison o d de la chape à la verticale et par B la hauteur o d du sommet d au-dessus de la naissance a. Supposons cette chape d'une maçonnerie distincte de celle de la voûte et elle récente pour qu'elle puisse se comprimer et peser proportionnellement à son épaisseur sur chaque partie inférieure de la voûte proprement dite.

Abaissons du point t la perpendiculaire t u sur o d; nous aurons les proportions, $\sin(I+\alpha) : \sin\alpha :: B : t d = \frac{B \sin\alpha}{\sin(I+\alpha)}$; $1 : \sin I :: t d : t u = \frac{B \sin I \sin\alpha}{\sin(I+\alpha)}$. Ainsi l'expression de la surface du triangle o d t sera $\frac{1}{2} B^2 \frac{\sin I \sin\alpha}{\sin(I+\alpha)}$; celle de la surface du secteur c' o m est $\frac{1}{2} r^2 \alpha$; on a



$$\text{donc } m'cdt = p = \frac{1}{2} B^2 \frac{\sin I \sin \alpha}{\sin(I+\alpha)} - \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

Le moment de ce quadrilatère $m'cdt$ par rapport au point m ou n est égal à la différence des moments du triangle et du secteur; or, les distances des centres de gravité de ces deux dernières figures à la verticale sont respectivement $\frac{1}{3} ta$ et $\frac{4r \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{3\alpha}$; donc, à cause de $m m' = r \sin \alpha$, $n n' = R \sin \alpha$, et de $m'e = R - r \cos \alpha$, $n'e = R(1 - \cos \alpha)$, si la force X est appliquée en c , ou de $m'e = r(1 - \cos \alpha)$, $n'e = R - R \cos \alpha$, si cette force agit en c , on aura (*),

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha (\frac{1}{2} \alpha + \alpha)} \left[B^2 \frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)} - r^2 \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right] \dots \dots \dots (G)$$

et respectivement pour les points m, n ,

$$px = \frac{1}{6} \sin^2 \alpha \left\{ B^2 \frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)} \left[3r - B \frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)} \right] - r^3 \left[3 \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \right] \right\},$$

$$px = \frac{1}{6} \sin^2 \alpha \left\{ B^2 \frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)} \left[3R - B \frac{\sin I}{\sin(I+\alpha)} \right] - r^3 \left[3R \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{r}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \right] \right\};$$

puis, selon qu'il s'agit du point c ou c' ,

$$X = \frac{px}{R - r \cos \alpha} \dots \dots (E), \quad X = \frac{px}{R(1 - \cos \alpha)} \dots \dots (F)$$

et

$$X = \frac{px}{r(1 - \cos \alpha)} \dots \dots (F'), \quad X = \frac{px}{r - R \cos \alpha} \dots \dots (F'')$$

L'équation (n) s'obtiendra immédiatement par la considération que le moment M se compose des moments du rectangle aj et du triangle dol , moins celui du secteur aoe ; d'où résulte tout de suite

$$\frac{1}{2} h c^2 + \frac{1}{2} (B^2 \tan I - \frac{1}{2} \pi r^2) \varepsilon + \frac{1}{2} B^2 \tan I (3r - B \tan I) + \frac{1}{12} r^3 (4 - 3\pi) = PL \dots (n),$$

les quantités P et L étant rapportées au point c ou au point c' .

Dans l'exécution, on supprime non seulement le petit triangle de maçonnerie ikl , mais encore le trapèze de terre $lkk'l'$, lorsque la chape est recouverte d'une couche de cette matière. Pour simplifier et pour ne pas tomber sur une équation du troisième degré, d'où dépendrait à la rigueur la valeur de ε , on établit les formules sans tenir compte de ces suppressions ce qui est d'ailleurs en faveur de la solidité.

* Voir en outre du panier.

§3. On appelle arc de panier un cintre composé de plusieurs arcs de cercle qui se raccordent. La forme se rapproche de celle d'une demi-ellipse, mais à tort cette dernière, cette arcée avantagée, celui de produire plus de dégagement vers les naissances,

(*) L'auteur du mémoire sur les ponts des routes (1846 du *Memorial*, page 36) détermine le moment du trapèze $lkk'l'$ par un intégration immédiate, en appliquant la méthode que M. L. Lion a employée dans sa mécanique (tom. 1, p. 106); mais cet auteur a oublié au numérateur du premier terme de l'expression qu'il trouve, et sous la forme est d'ailleurs compliquée, la quantité $-r \cos \alpha$.

sans augmenter la montée. On donne à une anse de panier 3 ou 5, 7 et jusqu'à 11 contres, selon que la montée doit être au-dessus ou au-dessous du tiers de l'ouverture: par là, on évitant des changements de courbure trop marqués et qui seraient d'un aspect désagréable, on diminue encore l'inconvénient attaché à l'ellipse d'assigner un panneau particulier pour chaque tête de vouture dans la demi-voute.

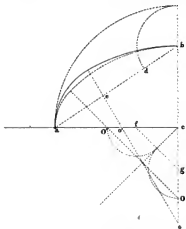
Conditions du tracé

60). Les conditions auxquelles le tracé de l'anse de panier doit satisfaire, sont: 1.^o que la tangente au point extrême de la montée, soit horizontale; 2.^o que les tangentes aux naissances soient verticales; 3.^o que les différents arcs qui la composent se touchent à leur rencontre.

Tracé de l'anse de panier à trois centres.

figure 12.

61). Considérons d'abord la courbe à trois centres et désignons par a la demi-ouverture ca , par b la montée cb , par r, r' les rayons $ob, o'a$ des arcs du sommet et de la naissance et par y, x les distances $oc, o'c$ des centres o, o' au point c .



On satisfait aux deux premières conditions en plaçant les deux centres respectivement sur la verticale cb et sur l'horizontale ca , à cause de $r = b + y, r' = a - x$, la troisième condition sera exprimée par l'équation

$$b + y = a - x + \sqrt{x^2 + y^2} \dots (1).$$

On a donc que cette seule relation entre x, y ou entre les rayons r, r' , d'où il suit que la question est indéterminée; par conséquent, on peut s'imposer une quatrième condition, celle, par exemple, que le rapport du grand au petit rayon soit un minimum. Or ce rapport n'est autre chose que le premier

nombre de l'équation (1) écrite sous la forme,

$$\frac{b+y}{a-x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a-x}; \dots (2)$$

sa différentielle égale à zéro donnera

$$(a-x) dy + (b+y) dx = 0,$$

et réduira celle de l'équation (1) à

$$(a-x)(x dx + y dy) + (x^2 + y^2) dx = 0;$$

éliminant $\frac{dy}{dx}$, on a

$$ax - by = 0;$$

combinant ce résultat avec (1) et posant, pour abréger, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, on trouve

$$x = \frac{b(a-b)}{a+b-e}, \quad y = \frac{a(a-b)}{a+b-e};$$

d'où

$$r' = e \frac{e-(a-b)}{2a}, \quad r = e \frac{e+(a-b)}{2b} \dots \dots (3)$$

valeurs dont la construction est fort simple: on prend $bd=a-b$ et sur le milieu e de ad on élève la perpendiculaire eo qui coupe be et ae aux centres o, o' cherchés; car $ae = \frac{e-(a-b)}{2}$, $be = \frac{e+(a-b)}{2}$, et on comparant au triangle aBe , les triangles $aeeo'$, $beeo$ qui lui sont semblables; on retrouve les valeurs de r' et de r ; par conséquent aussi celles de x et de y .

En désignant par c l'angle coo' , on aura évidemment...
 $\text{tang } c = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

Si l'on voulait que la différence $b+y-(a-x)$ des rayons fût un minimum, on aurait

$$dx + dy = 0,$$

et la différentielle de l'équation (1) se réduirait à

$$x dx + y dy = 0;$$

d'où l'on conclut

$$x=y=(a-b)(1+\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad c=45^\circ;$$

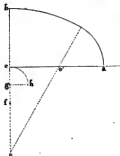
et

$$r' = b - \frac{a-b}{\sqrt{2}}, \quad r = a + \frac{a-b}{\sqrt{2}} \dots \dots (4)$$

Pour construire ces valeurs on portera cb on af , on prendra $cg=cf$ et les arcs décrits des centres f et g , avec un rayon égal à la moitié de fg , détermineront les centres demandés o' et o ; ce qu'il est facile de vérifier.

On voit que la différence $r-r'=(a-b)(1+\sqrt{2})$ des rayons est proportionnelle à la différence $a-b$ de la demi-ouverture et de la montée. Les deux rayons approchant plus de l'égalité, le centre aurait une apparence plus agréable; mais comme ils sont moindres respectivement que les précédents, la route aurait moins de capacité intérieure.

figure 13.



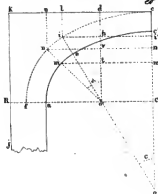
Communément on détermine les rayons par la condition que les arcs soient chacun de 60° ; alors on a $\sqrt{x^2+y^2}=2x$, $y=x\sqrt{3}$ et l'équation (1) donne

$$x = \frac{1}{2}(a-b)(1+\sqrt{3}) \dots \dots (5)$$

Cette valeur peut se construire ainsi: on porte ae on bf , sur le milieu g de ef on élève la perpendiculaire $gh=cg$ et du point h , comme centre, on décrit avec le rayon cf un arc qui coupe l'axe horizontal au centre cherché o' . Dans ce cas l'angle $coo'=c=30^\circ$.

Formules propres à la voûte de cette espèce; car on elle est contenue parallèlement.

figure 14.



(62). Cherchons maintenant les formules propres à ce genre de voûte: soit $Ca=a$, $C'e=b$, l'angle $coi=c$, $oc=R$, $oc'=r$, $oi=R'$, $oe=r'$ et représentons par S et s les surfaces $ec'ei$, $emni$; par V , v leurs moments relatifs aux verticales oc , $o'd$ respectivement, et par M , m et N , n leurs moments respectifs, par rapport aux points m et n . Posant $\frac{R}{r}=K$, $\frac{R'}{r'}=K'$ et observant que $m m'=r' \sin \Delta + Co'$, $n n'=R' \sin \Delta + Co'$, $Co'=(r-r') \sin c$ et que la ligne qui divise l'angle $m'oe$ en deux parties égales fait avec la verticale un angle $=\frac{1}{2}(\Delta+c)$, on trouvera sans difficulté $S=\frac{1}{2}r^2(K^2-1)c$, $s=\frac{1}{2}r'^2(K'^2-1)(\Delta-c)$; $V=\frac{1}{2}r^3(K^2-1)\sin^2\frac{1}{2}c$, $v=\frac{1}{2}r'^3(K'^2-1)\sin^2\frac{1}{2}(\Delta-c)\sin^2\frac{1}{2}(\Delta+c)$; $M=S[(r-r') \sin c + r' \sin \Delta] - V$; $m=sr' \sin \Delta - v$; $N=S[(r-r') \sin c + R' \sin \Delta] - V$; $n=sR' \sin \Delta - v$; et parce que c ou c' étant le point d'application de la force X , on a $m'c=td=b+r(K-1)-r' \cos \Delta$, $n'c=vd=$ $b+r(K-1)-R' \cos \Delta$, et $m'e=b-r' \cos \Delta$, $n'e=b-R' \cos \Delta$, il viendra ces formules abrégées,

$$X = \frac{S+s}{\tan(\Delta+\varphi)} \dots \dots \dots (1), \quad X = \frac{S+s}{\tan(\Delta-\varphi)} \dots \dots \dots (2)$$

et

$$X = \frac{M+m}{b+r(K-1)-r' \cos \Delta} \dots \dots \dots (3), \quad X = \frac{N+n}{b+r(K-1)-R' \cos \Delta} \dots \dots \dots (4)$$

ou

$$X = \frac{M+m}{b-r' \cos \Delta} \dots \dots \dots (5), \quad X = \frac{N+n}{b-R' \cos \Delta} \dots \dots \dots (6)$$

dont le développement se réduira à de simples substitutions. Maintenant, la distance du centre de gravité de $ec'ei$ ou S à la verticale oc est $\frac{V}{S}$; on la retranchant de CR ou $E+a$, on aura la distance à la verticale jR . Faisons $\Delta=\frac{\pi}{2}$ dans les expressions de S et de V ; elles deviendront celles de la surface $aei'f$ ou b' et de son moment v' relatif à la verticale $o'd$; et à cause de $\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}c)=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}c)$ et de $\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}c)=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}c)=\sin(\frac{\pi}{2}-c)=\cos c$; nous trouverons

$$S=\frac{1}{2}r^2(K^2-1)(\frac{\pi}{2}-c); \quad v'=\frac{1}{2}r'^3(K'^2-1)\cos c;$$

or, la distance du centre de gravité de S' à la verticale $o'd$, est $\frac{v'}{S'}$; on la retranchant de $o'R=E+r'$, nous aurons la distance à la verticale jR ; de là résultera l'équation

$$\frac{1}{2}hE^2+(S+s')E+Sa+s'r'-v-v'=PL \dots \dots \dots (7)$$

Ces six elle est contenue de nouveau.

(63). Représentons semblablement par S et s les surfaces $ec'ei$, $liemnu$; par M , m et N , n leurs moments respectifs par rapport aux points m et n . On a $ec'ei=eli'i'+oi'i'-c'eo$;

lie m n u = d v n u + n v o' - (d h i l + i h o) - e m o'. Or, o i' = R cos e,
i i' = R sin e, c i' = R (1 - cos e); soit, pour abréger, C o = b + R - r = b, il viendra
v o' = R' cos a, n v = R' sin a, v d = b' - R' cos a, h o' = R' cos e, i h = R' sin e,
h d = b' - R' cos e.

Cela posé, on aura d'abord,

$$S = \frac{1}{2} r^3 \sin e \left[K^3 (1 - \cos e) - \frac{e}{\sin e} \right],$$

$$s = \frac{1}{2} r^3 \sin (a - e) \left[\frac{b' K'}{r^3} \frac{\cos \frac{1}{2} (a + e)}{\cos \frac{1}{2} (a - e)} - K^3 \cos (a + e) - \frac{a - e}{\sin (a - e)} \right];$$

puis en prenant subsidiairement le moment V de S par rapport à la verticale oc, le moment v de s par rapport à la verticale o'd et observant que m m' = r' sin a + (r - r') sin e, n n' = R' sin a + (r - r') sin e, m l = r' sin a, on trouvera

$$V = \frac{3}{2} r^3 \sin^2 \frac{1}{2} e \left[1 + K^3 \cos^2 \frac{1}{2} e (3 - 2 \cos e) \right],$$

$$v = \frac{1}{2} r^3 \left[6 \sin \frac{1}{2} (a + e) \sin \frac{1}{2} (a - e) + 3 \frac{b' K'}{r^3} \sin (a + e) \sin (a - e) - 2 K^3 (\sin^2 a \cos a - \sin^2 e \cos e) \right]$$

et

$$M = S [r' \sin a + (r - r') \sin e] - V; \quad m = s r' \sin a - v;$$

$$N = S [R' \sin a + (r - r') \sin e] - V; \quad n = s R' \sin a - v.$$

Enfin si l'on fait $a = \frac{\pi}{2}$ dans s et dans v, il viendra . . .

$$s' = \frac{1}{2} r^3 \cos e \left[K^3 \sin e + 2 \frac{b' K'}{r^3} \tan \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} e \right) - \frac{\frac{1}{2} \pi - e}{\sin \left(\frac{1}{2} \pi - e \right)} \right],$$

$$v' = \frac{1}{6} r^3 \cos e \left[2 + 3 \frac{b' K'}{r^3} \cos e + 2 K^3 \sin^2 e \right].$$

Les équations (1), (2), et (3), (4) ou (5) (6) auront ainsi que l'équation (n), ou S, s, M, m, N, n et s', v', la même forme absolument que dans le cas précédent, si ce n'est que pour l'équation (n) les quantités s' et v' devront comprendre le rectangle f K.

De l'axe de panier extradothée ou chape.

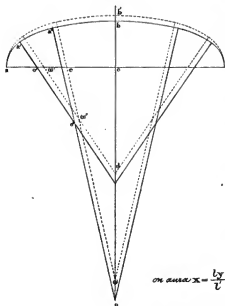
64). Nous ne parlerons point de l'axe de panier extradothée ou chape, parce qu'elle a une poutre enclive et par cette raison exige une trop grande épaisseur de pied-droit, pour qu'on puisse l'employer.

Trace de l'axe du panier à plus de trois centres.

65). Quand la montée est moindre que le tiers de l'ouverture, la grande différence qui se trouve entre les rayons r, r' rendant le cintre difforme, il devient nécessaire de partir de la courbure du sommet à celle des naissances, par des courbes intermédiaires; c'est-à-dire, de composer le cintre d'un nombre d'arcs plus grand que trois, et alors la question est encore plus indéterminée; car, puisqu'il suffit que l'arc du sommet embrasse ceux des naissances, ou que le plus grand rayon surpasse la somme du plus petit et de la distance des centres, on n'a que la condition $(r - r')^2 > (r - b)^2 + (a - r')^2$, laquelle n'est pas même une équation.

On dispense de cette indétermination de la manière suivante: suppose que ω soit le centre de l'arc du sommet, on prend $c \omega = \frac{1}{2} c \omega$ (le rapport $\frac{1}{2}$ est arbitraire), et l'on regarde ω comme le centre de

figure 15



l'arc de naissance; ce la fait, s'il s'agit de l'arc de panier à cinq centres, on divise oc en deux parties wd , dc égales entre elles et Wc en deux parties $W'e$, ec proportionnelles aux nombres 1, 2; on mène les droites $W'e$, $W'd$ qui se coupent au point W'' et prenant ce point pour le centre de l'arc intermédiaire dont r'' désigne le rayon, on détermine la distance $W'e$ et par conséquent les rayons r , r' , r'' par la condition que la montée $cb' = cb = b$.

Le calcul direct des rayons serait long et compliqué; on le simplifie par ce procédé remarquable, rapporté dans le traité de Gavithy: la construction précédente, dans laquelle W est supposé le centre de l'arc du sommet, étant effectuée, on connaîtra les longueurs l, l', p de Wc , $W'e$, $WW'' + W''W'$; or, si o, o', o'' étaient les véritables centres, les figures $cW''W'o'$ et $co'o'o''$ seraient évidemment semblables; donc en faisant $oc = x$, $o'c = y$, $oo'' + o'o' = z$,

on aura $x = \frac{ly}{l'}$, $z = \frac{py}{l'}$ et comme $x + b = z + a - y$, il s'en suivra,

$$x = \frac{(a-b)l}{l+l'-p}, \quad y = \frac{(a-b)l'}{l+l'-p} \dots \dots (4)$$

de là les rayons r, r', r'' et les angles qu'ils font avec la verticale. Quel que soit le nombre N des centres, si l'on en retranche l'unité et que n soit la moitié du reste, on trouve que $n = \frac{N-1}{2}$, il n'y aura qu'à diviser la distance Wc en n parties égales, et la distance $W'e = \frac{1}{3} Wc$, en un pareil nombre de parties qui soient entre elles comme 1, 2, 3, n , puis joindre W avec le point de division de Wc , le plus voisin de c , et ainsi de suite. Cela fait, on trouvera les véritables centres en répétant la même division sur les lignes $oc, o'c$ déterminées au moyen des deux équations (4) dans lesquelles p sera le périmètre $W'W''W'' \dots \dots W$. On voit que les lignes $ao'o' \dots \dots o$ et $a'a'o' \dots \dots b$ sont analogues à une développée et sa développante; de sorte que $ob = ao'o' \dots \dots o$. Mais quand même la route serait turbulente au quard, il serait inutile de compter l'arc du panier d'un grand nombre d'arcs et en général il suffit d'en employer cinq.

Des formules propres aux ovales de ce genre.

66). Comme le joint de plus grande section peut répondre à l'arc intermédiaire ou à l'arc des naissances, il faut calculer les 2 formules pour chacun de ces cas. Le premier rentre dans celui de l'arc de panier à trois centres; pour le second, on aura à considérer trois portions du profil, au lieu de deux, mais le

procédé sera tout-à-fait analogue, que la voûte soit extradosée parallèlement ou de niveau. Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce sujet.

Voûte en arc de cercle.

67). Le cintre de la voûte ou arc de cercle est un seul arc qui est tout déterminé dès que l'ouverture $2a$ et la montée b sont connues. Soit r le rayon de l'arc et c l'angle au centre, entre les côtés duquel cet arc est compris; on aura $a^2 = b(2r - b)$, $\sin c = \frac{b}{r}$, équations d'où l'on tire

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \quad \sin c = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

et qui en général feront connaître deux des quatre quantités a , b , c , r , quand les deux autres seront données.

La voûte en arc de cercle extradosée parallèlement ou de niveau, ou en chape n'est qu'un cas particulier de la voûte en plein cintre, extradosée de même, et les formules propres à celle-ci s'appliquent à l'autre, avec quelques modifications qui concernent principalement l'équation $M = PL$.

Cas où la voûte est extradosée parallèlement; formules.

figure 16.

68). Lorsque la voûte en arc de cercle sera extradosée parallèlement, on fera $\lambda = c$, dans les expressions (G), (F) et (C), (E) propres à la voûte en plein cintre d'égale épaisseur, pourvu que la valeur de δ , à laquelle répondra le maximum de cha-

cune des deux dernières expressions, soit plus grande que c ; autrement, on y conserverait la valeur de δ , relative au maximum.

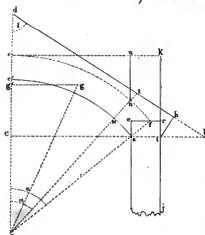
D'ailleurs, on a $ac'cf = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)c$, $gg' = \dots \dots \dots \frac{4(R^3 - r^3) \sin^2 \frac{1}{2} c}{3(R^2 - r^2)c}$; en outre, la distance du centre de

gravité g de $ac'cf$ à la verticale passant par l'arête extérieure de la base du pied-droit, sera $e + a - gg'$, et, par rapport à cette même arête, le moment de la figure $aefj$, équivaudra au moment $\dots \dots \dots \frac{1}{2}[h + (R - r) \cos c]e^2$, du rectangle ej , moins le moment $\frac{1}{2}(R - r)^2 \sin c \cos c [e - \frac{1}{3}(R - r) \sin c]$, du triangle aef .

En conséquence, l'équation (n) sera

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}[h + (R - r) \cos c]e^2 + \frac{1}{2}[(R^3 - r^3)c - (R - r)^2 \sin c \cos c]e + \frac{1}{6}(R - r)^2 \sin^2 c \cos c + \dots \\ & \frac{1}{2}a(R^3 - r^3)c - \frac{1}{3}(R^3 - r^3) \sin^2 \frac{1}{2} c = PL \dots \end{aligned} \right\} (n)$$

Dans ce cas, la poutre turpante ou général le frottement exercé sur le plan à l'origine et il faut prévenir le glissement par quelque moyen d'art.



Cas où la voûte est extradosée de niveau et en chape; formules.

69). Pareillement, quand la voûte en arc de cercle est extradosée soit de niveau, soit en chape, les formules (G), (g) et (F), (f) ou (F'), (f') relatives aux cas analogues de la voûte en plein cintre, lui sont applicables, suppose la substitution, s'il y a lieu, de l'angle c à l'angle α .

Le moment de la demi-voûte par rapport à l'arête extérieure de la bête du pied-droit, s'obtiendra fort simplement en observant qu'il équivaut, dans le premier cas, à la somme des moments du rectangle aj , du rectangle CK et du triangle CaO , moins le moment du secteur aoc ; et dans le second cas, à la somme des moments du rectangle aj , des triangles CaL , CaO , moins le moment du secteur aoc ; on voit que l'équation (n) sera, pour la voûte à extrados horizontal,

$$\frac{1}{2}(h+R-r \cos c)E + \left[a(R - \frac{1}{2}r \cos c) - \frac{1}{2}r^2 c \right] E + \frac{1}{2}a \left[R - \frac{1}{2}r \cos c - r^2 c \right] + \left. \frac{2}{3}r^3 \sin^2 \frac{1}{2}c = PL \dots \right\} \dots (n)$$

et pour la voûte extradosée en chape,

$$\frac{1}{2}hE + \frac{1}{2} \left[B^2 \tan g I + r(a \cos c - rc) \right] E + \frac{1}{2}B^2 \tan g I \left(a - \frac{1}{2}B \tan g I \right) + \dots \left. \frac{1}{2}ar \left(\frac{2}{3}a \cos c - rc \right) + \frac{2}{3}r^3 \sin^2 \frac{1}{2}c = PL \dots \right\} \dots (n)$$

Plate-bande; formules.
figure 17.



70). On appelle plate-bande une voûte plane dans le profil de laquelle la douelle et l'extrados sont des droites horizontales et les joints, d'autant droites obliques aux premières, mais dirigés à un même point de l'axe vertical oc du profil. Soient l'angle $c'od=c$, $c'd=a$, $c'e=e$, $oe=r$; les surfaces des triangles $oc'm$, oen seront $\dots \dots \dots \frac{1}{2}(e+r)^2 \tan g \lambda$, $\frac{1}{2}r^2 \tan g \lambda$ et leur différence équivaudra à la surface p du trapèze $c'mno$; de sorte que l'on aura $\dots \dots \dots p = \frac{1}{2}[(e+r)^2 - r^2] \tan g \lambda$. Les distances des centres de gravité de ces triangles à la verticale oc seront $\frac{1}{3}(e+r) \tan g \lambda$, $\frac{1}{3}r \tan g \lambda$; divisant la différence des moments par la différence des surfaces, on trouvera la distance du centre de gravité du trapèze à la même verticale, et cette distance retranchée de $c'm$ ou $r \tan g \lambda$, donnera

$$x = \frac{(3r^2 - e^2) e \tan g \lambda}{3[(e+r)^2 - r^2]}; \text{ de là résulteront les expressions}$$

$$X = \frac{1}{2}[(e+r)^2 - r^2] \frac{\tan g \lambda}{\tan g(\lambda + \varphi)} \dots \dots \dots (G)$$

$$X = \frac{1}{6}(3r^2 - e^2) \tan g^2 \lambda \dots \dots \dots (F)$$

dont la première montre qu'abstraction faite du frottement, la force X sera constante, si les joints sont dirigés à un même point o et réciproquement. Pour le maximum de cette première, on a $\sin 2(\lambda + \varphi) = \sin 2\lambda$; d'où $\lambda + \varphi = 90^\circ - \lambda$; soit $\tan g \varphi = 0,76$, c'est-à-dire, $\varphi = 37^\circ - 16'$, il s'en suivra $\lambda = 26^\circ - 23'$. La seconde n'a point de maximum absolu et sa plus grande valeur répond à $\lambda = c$. On

substituera dans ces expressions les valeurs de α , et $\frac{d}{\tan \alpha}$ au lieu de r . Quant à l'équation (n), on la formera en observant que le moment de la demi-voûte par rapport à l'arête extérieure de la base du pied-droit, équivalent à la somme des moments des deux rectangles aB' , eB' et l'on aura pour l'épaisseur de voûte dont il s'agit, les formules,

$$G = 0,1660576 \left(\frac{ae}{\tan \alpha} + \frac{1}{2} e^2 \right) \dots (G), \quad F = \frac{3a^2 - e^2 \tan^2 \alpha}{6} \dots (F)$$

$$\frac{1}{2} (e+h) E^2 + a e E + \frac{1}{2} a^2 e - (e+h) P \dots (n);$$

ainsi G augmente et F diminue à mesure que, toutes choses d'ailleurs égales, e devient plus grand, et il vient $F=0$, lorsque $e = \frac{a\sqrt{3}}{\tan \alpha}$.

On s'assurera d'ailleurs si la demi-voûte glissera ou non sur la base de son pied-droit, en comparant son poids multiplié par $\tan \alpha$, avec la valeur de la force P .

Des voûtes sphériques ou en dôme

71). Une voûte en dôme, à base circulaire, est engendrée par la révolution d'un profil tel que $ac'ef$ autour d'un axe vertical oc . Dans ce mouvement les points m, n, \dots décrivent des cercles horizontaux, dont les centres sont dans l'axe, et les lignes m, n, r, s, \dots engendrent des joints coniques qui ont pour sommet commun le point o et qui divisent la voûte en atèles latérales dont elles-mêmes divisées en vousoirs par des plans méridiens, c'est-à-dire, par le profil générateur, considérée dans différentes positions.

Manière d'en établir la stabilité.

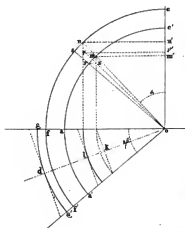
72). Pour établir la stabilité d'une voûte de ce genre, on suppose cette voûte partagée par des plans méridiens, en un nombre pair de demi-fusées égales, opposés deux à deux, et agissant l'un contre l'autre par l'arête commune $c'e$; de sorte qu'on n'a plus qu'à considérer séparément deux de ces fusées opposés et les parties correspondantes du tambour ou pied-droit cylindrique, comprises entre les mêmes plans méridiens. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée par l'observation qui apprend qu'une voûte en dôme qui manque de stabilité, se lézarde et tend à se rompre suivant des plans méridiens.

Le nombre des plans de division qu'on emploie, dépend des dimensions des vousoirs, du mode de construction, mais surtout du nombre de parties faillées que présente le pied-droit: par exemple, si les atèles de la voûte étaient reliées entre-elles par des barres, des goupilles de fer, ou par tout autre moyen, il est évident qu'il n'existerait plus de poutres; si le pied-droit devait être percé sur son pourtour, les plans méridiens seraient au même nombre que les ouvertures et passeraient par leurs milieux.

En général, le glissement sur les joints, de dehors ou dedans de la voûte, est impossible et dans le sens contraire, il ne peut

Voute sphérique, extradosée
parallèlement; formules.

figure 18.



avoir lieu, comme on le sait, que sur le joint de naissance.

73). Nous nous bornons à la voute sphérique, extradosée parallèlement. Il est clair que les centres de gravité du demi-fusau et de ses parties déterminées par les joints coniques, sont dans le plan méridien $o\delta$, moyen entre les méridiens $o\delta$, $o\delta'$ qui comprennent le fusau. Soit α/β l'angle fof' ou l'arc qui le mesure dans le cercle dont le rayon est 1. Pendant que le profil $ac\delta$,

générateur de la voute, tourne de la quantité infiniment petite δ/β ; l'élément de surface $mrsn$, engendre un élément de volume $\delta^2 p$, égal à la différence des deux pyramides sphériques dont les bases sont les éléments de zone, décrits par mr et ns . Or, l'élément de zone a pour mesure, la hauteur de la zone, multipliée par l'arc de grand cercle qui répond à l'angle δ/β ; mais à cause de l'égalité des angles mrx , mom' , cette hauteur est $r \sin \delta/\beta$, sur la sphère du rayon r et de même $R \sin \delta/\beta$, sur la sphère du rayon R ; donc $\delta^2 p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \sin \delta/\beta \delta \alpha \delta \beta$. De là résultent les expressions des volumes $d p$, p engendrés par les surfaces $mrsn$, $c'mnc$, parcourant l'arc fini α/β ; savoir $d p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \beta \sin \delta/\beta \delta \alpha$ et

$$p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) (1 - \cos \delta) / \beta \dots \dots (c)$$

Cela posé, la distance δ du centre de gravité du volume élémentaire $\delta^2 p$, au centre o , s'obtiendra en divisant par ce volume la différence des moments des deux pyramides, pris par rapport à ce même centre, et parce que le centre de gravité d'une pyramide est aux $\frac{3}{4}$ de sa hauteur à partir du sommet, on aura

$$\delta = \frac{3(R^2 - r^2)}{4(R^2 - r^2)}.$$

Pour rapporter les centres de gravité et les moments à l'axe oc , observons que les centres de gravité des deux pyramides et de l'élément $\delta^2 p$ qui on est la différence, sont sur une même droite avec le point o , et que comme la dimension mr est infiniment petite, cette droite fait avec l'axe oc un angle qui ne diffère de l'angle δ que d'une quantité infiniment petite aussi; donc la distance du centre de gravité de l'élément $\delta^2 p$ est simplement $\delta \sin \delta$, expression indépendante de β ; d'où il suit que les centres de gravité de tous les éléments égaux à $\delta^2 p$ qui composent le solide $d p$, sont sur un arc de cercle horizontal dont le centre est dans l'axe oc , dont le rayon est $\delta \sin \delta$, et la longueur $\alpha/\beta \delta \sin \delta$; par conséquent, la distance du centre de gravité du solide $d p$, est $\frac{\delta \sin \delta \sin \beta}{\beta}$ et son moment $d m = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \sin \beta \sin^2 \delta \delta \alpha$.

En intégrant on trouve

$$m = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) (\Delta - \sin \Delta \cos \Delta) \tan \beta \dots (3)$$

C'est le moment du solide p relativement à l'axe oc; de sorte que la distance D du centre de gravité de ce solide au même axe est donnée par l'équation $D = \frac{m}{p}$.

Maintenant les distances OK, OL de l'axe oc à la corde de l'arc décrit par le point m et à la tangente au milieu de l'arc engendré par le point n, sont $r \sin \Delta \cos \beta$ et $R \sin \Delta$; donc $x = r \sin \Delta \cos \beta - D$, pour le premier point, $x = R \sin \Delta - D$, pour le second point, et comme on a toujours $y = R - r \cos \Delta$ et $y = R (1 - \cos \Delta)$ ou $y = r (1 - \cos \Delta)$ et $y = r - R \cos \Delta$, respectivement pour les deux points, selon que la force X est appliquée en c ou en c'; on aura ici, en faisant, pour abréger, $\frac{R}{r} = K, \frac{2}{3} r^3 (K^2 - 1) \sin \beta = A, \frac{1}{2} r^4 (K^2 - 1) \sin \beta = B, \frac{2}{3} r^4 K (K^2 - 1) \beta = A'$ et, pour un moment, $A \sin \Delta - B \Delta - (A - B) \sin \Delta \cos \Delta = N, A' \sin \Delta - B \Delta - \dots (A' - B) \sin \Delta \cos \Delta = N'$,

$$X = \frac{N}{r(K - \cos \Delta)} \dots (3), \quad X = \frac{N'}{K r (1 - \cos \Delta)} \dots (4)$$

ou

$$X = \frac{N}{r(1 - \cos \Delta)} \dots (5) \quad X = \frac{N}{r(1 - K \cos \Delta)} \dots (6)$$

D'abord, égalant à zéro la différentielle de (3) relative à Δ , nous trouverons $(K - \cos \Delta) [2(A - B) \sin^2 \Delta - A(1 - \cos \Delta)] - A \sin^2 \Delta + B \Delta \sin \Delta + (A - B) \sin^2 \Delta \cos \Delta = 0$ ou, en développant et réduisant, $2(A - B)K \sin^2 \Delta - A(K + 1)(1 - \cos \Delta) + \dots B \Delta \sin \Delta - (A - B) \sin^2 \Delta \cos \Delta = 0$, et en divisant par $(A - B) \sin^2 \Delta$,

$$\left. \begin{aligned} 2K &= (K + 1) \frac{A}{A - B} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \Delta} - \frac{B}{A - B} \frac{\Delta}{\sin \Delta} + \cos \Delta \dots \\ F &= \frac{2(A - B) \sin \Delta - A \tan \frac{1}{2} \Delta}{r} \dots \end{aligned} \right\} (F)$$

supposé qu'on prenne pour la valeur de F le rapport des différentielles du numérateur de (3). Ensuite, les mêmes opérations répétées sur l'expression (4) produiront les formules,

$$\left. \begin{aligned} 2 &= \frac{A'}{A' - B} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \Delta} - \frac{B}{A' - B} \frac{\Delta}{\sin \Delta} + \cos \Delta \dots \\ F' &= \frac{2(A' - B) \sin \Delta - A' \tan \frac{1}{2} \Delta}{r K} \dots \end{aligned} \right\} \dots (F)$$

dont chacune ne diffère de son analogue (F) que par le changement de A et r en A' et R.

De ces résultats, on déduit immédiatement ceux qui se rapportent aux expressions (5), (6) et qui détermineraient F, F': pour la première (5), on changera A' en A et R en r, dans les formules (F); pour la seconde (6), il suffira de mettre r à la place de R et

reciproquement, dans les formules (P); on peut donc se dispenser d'écrire ces autres formules.

Pour former l'équation (P), on fera d'abord $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans (3) et (2), ce qui donnera le demi-fusé et son moment par rapport à la verticale oc , et le quotient de cette dernière quantité divisée par l'autre, sera la distance du centre de gravité du fusé à la même verticale. Si donc e et h sont l'épaisseur et la hauteur du pied-droit cylindrique, on retranchant cette distance, de $r+e$ et multipliant le reste, par le fusé on aura le moment.
 $(r+e - \frac{3}{4} \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2} \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}) \times \frac{3}{2} (R^3 - r^3)$, par rapport au point d , ou ce qui revient au même, par rapport à la tangente au milieu de l'arc extérieure de la base du pied-droit; ensuite, le volume du pied-droit sera $h\beta[(r+e)^2 - r^2]$ et son moment relativement à cette tangente, $[r+e - \frac{3}{4} \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{2} \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta}][(r+e)^2 - r^2] h\beta$; ainsi

la quantité $r+e = z$, prise pour inconnue, dépendra de l'équation du troisième degré,

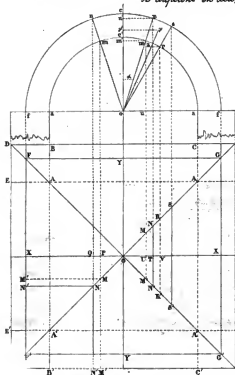
$$h(\beta - \frac{3}{4} \sin \beta) z^3 - \beta [h r^2 - \frac{3}{4} (R^3 - r^3)] z + [\frac{3}{4} h r^2 - \frac{\pi}{8} (R^4 - r^4)] \sin \beta = PL \dots (N)$$

Des voûtes d'arc de cercle, et on en a vu de
détail.

figure 19

767. Considérons deux demi-cylindres à bases circulaires, de rayons égaux et dont les axes XX, YY compris dans un même plan horizontal, sont perpendiculaires entre eux. Les surfaces de ces cylindres se couperont en deux ellipses égales, situées dans les plans verticaux

AOA', AOA' , et qui partageront ces surfaces en huit nappes; quatre intérieures, égales entre-elles, limitées de part et d'autre aux ellipses d'intersection, et composant la douelle d'une voûte en arc de cloître, sur laquelle ces ellipses forment des arêtes rentrantes; quatre extérieures, pareillement égales entre elles, limitées, d'une part, aux cercles verticaux AA, AA' , AA', AA' , d'autre part, aux ellipses d'intersection, et composant la douelle d'une voûte d'arc, sur laquelle ces ellipses forment des arêtes saillantes. C'est de ces voûtes, les plus simples de leur espèce, et auxquelles nous supposerons une épaisseur constante, que nous allons maintenant nous occuper.



Voûte en arc de cintre, simple
épaisseur; formules.

75). Pour concevoir l'équilibre de la voûte en arc de cintre, je la regarde comme décomposée en quatre parties indépendantes, telles que OFF', par les plans verticaux des ellipsoïdes. Le joint vertical se réduira ici à une droite que j'appellerai l'axe de la clef; deux parties opposées OFF', OGG' de la voûte, agissent l'une sur l'autre en se poutant par cet axe.

Il est évident que les centres de gravité du quart de voûte, OGG' et de ses parties déterminées par les plans de joint mn, r s et $\delta\sigma$ se trouvent dans le plan vertical OX; or, l'élément de volume, $d\wp$, projeté verticalement en m r s n et horizontalement en MRR' M'N'S'SN', est la différence de deux pyramides qui ont pour sommet commun le point O et pour bases, les surfaces élémentaires projetées l'une en m r et MRR'M', l'autre en n s et NSS'N', et dont chacune équivaut à sa projection horizontale, multipliée par $\cos \delta$. Mais $UV=r\lambda=r\cos \delta d\delta$; $MM'=2OU=2r\sin \delta$; donc la première surface élémentaire et semblablement la seconde, sont exprimées par

$$2r^2 \sin \delta \cos^2 \delta d\delta \dots (1), \quad 2R^2 \sin \delta \cos^2 \delta d\delta \dots (2);$$

ainsi, on a $d\wp = \frac{2}{3}(R^3 - r^3) \sin \delta \cos^2 \delta d\delta$, et en prenant l'intégrale depuis $\delta=0$,

$$p = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \delta) \dots (3)$$

c'est la mesure du solide OSS'NN'.

Le raisonnement qu'on a fait dans le cas de la voûte sphérique s'applique ici et l'on trouve pour la distance du centre de gravité de $d\wp$ au point O, la même expression $\frac{2(R^4 - r^4)}{3(R^3 - r^3)}$ que pour celle du solide $d\wp$ considérée dans le premier cas, expression qui multipliée aussi par $\sin \delta$ donnera la distance au plan vertical YY; on voit qu'on aura

$dm = \frac{2}{3}(R^4 - r^4) \sin^2 \delta \cos^2 \delta d\delta$, dont l'intégrale, prise depuis $\delta=0$, sera

$$m = \frac{2}{64}(R^4 - r^4)\left(\delta - \frac{1}{4}\sin 4\delta\right) \dots (4)$$

c'est le moment du solide p par rapport à ce plan YY; de là

$$d = \frac{m}{p} = \frac{g(R^4 - r^4)\left(\delta - \frac{1}{4}\sin 4\delta\right)}{32(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \delta)} \dots (5)$$

distance du centre de gravité de p au même plan. Mais $x = r \sin \delta - d$, pour le point m et $x = R \sin \delta - d$, pour le point n; donc on a respectivement,

$$px = r^4 \sin \delta \left[\frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \delta) - \frac{1}{16}(R^4 - r^4) \left(\frac{\delta}{\sin \delta} - \frac{\sin 4\delta}{4 \sin \delta} \right) \right],$$

$$px = r^4 \sin \delta \left[\frac{2}{3}K(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \delta) - \frac{1}{16}(R^4 - r^4) \left(\frac{\delta}{\sin \delta} - \frac{\sin 4\delta}{4 \sin \delta} \right) \right];$$

et comme on a encore $y = R - r \cos \alpha$ et $y = R(1 - \cos \alpha)$ ou $y = r(1 - \cos \alpha)$ et $y = r - R \cos \alpha$, respectivement pour les deux points et selon que la force X réside en c ou en c' , il viendra les formules

$$\frac{2r^3(K^2-1)(1-\cos^3 \alpha)}{g \tan g(\varphi + \alpha)} \dots \dots \dots (G),$$

$$X = \frac{Px}{r(K - \cos \alpha)} \dots \dots \dots (F), \quad X = \frac{Px}{rK(1 - \cos \alpha)} \dots \dots \dots (f);$$

$$X = \frac{Px}{r(1 - \cos \alpha)} \dots \dots \dots (F'), \quad X = \frac{Px}{r(1 - K \cos \alpha)} \dots \dots \dots (f')$$

Au moyen des expressions (3) et (5) dans lesquelles on fera $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et on observant que $CC' = 2(r + \varepsilon)$ on trouvera pour déterminer l'épaisseur du pied-droit, l'équation

$$h\varepsilon^3 + hr\varepsilon^2 + \frac{2}{9}(R^3 - r^3)\varepsilon + \frac{2}{9}r(R^3 - r^3) - \frac{4}{32}\pi(R^4 - r^4) = PL \dots (M).$$

Voici l'analyse facile d'après ces formules.

76). On concevra l'équilibre de la voûte, on la considérant comme décomposée en huit parties indépendantes, telles que $OF'Y$, $OF'X$ &c par les plans verticaux XX , YY des axes et ceux AOA' , AOA' des ellipsoïdes. Chaque double partie $OXFY$ et les deux parties collatérales $OG'Y$, OFX se poutieront mutuellement par les joints verticaux que les plans des axes déterminent. Le pilier $A'B'D'E'$ qui soutient cette double partie supportera en même temps les poutiers des deux parties collatérales; de sorte que la résultante de ces poutiers, égale entre elles et disposées symétriquement par rapport à lui, se trouvera dans le plan OD' et tendrait à faire tourner ce pilier autour du point D' de sa base; mais, comme la pierre se briserait en ce point, il vaudra mieux établir l'équilibre du pilier, on le regardant comme mobile autour de l'arête $E'D'$ et simplement comme chargé de la partie $OF'Y$ et pouti par la partie opposée $OG'Y$; il acquerra ainsi une plus forte épaisseur. En effet soit P' le poids d'une partie $OF'Y$, D la distance de son centre de gravité au plan vertical $A'B'$ de la naissance; la condition de l'équilibre de rotation autour de l'arête $E'D'$ sera exprimée par l'équation $\frac{1}{2}h\varepsilon^3 + P'(\varepsilon + D) = PL$. On peut donner à cette équation la forme $\frac{1}{\sqrt{2}}h\varepsilon^3 + 2P'\left[\frac{1}{2}(\varepsilon + D)\sqrt{2}\right] = PL\sqrt{2}$, sous laquelle elle exprimerait la condition de l'équilibre de rotation autour du point D' entre le pilier et les deux parties $OF'Y$, $OF'X$, si les centres de gravité de ces parties étaient dans les plans $F'G'$, $F'F$; mais, il est évident que ces centres tomberont dans les angles $OF'Y$, $OF'X$; par conséquent la distance de la résultante $2P'$ des poids des deux parties, au point D , supportera $(\varepsilon + D)\sqrt{2}$; d'où il suit que la valeur de ε sera

moindre dans l'hypothèse de la rotation autour du point D'.

Cela posé, le solide OYN NMM', que nous avons à considérer, est la différence entre le solide total OYN QPM' = $\frac{1}{2}(R^3 - r^3)R\alpha$ et le solide partiel ONQPM = ONTUM = $\frac{1}{2}(R^3 - r^3)(1 - \cos^2 \alpha)$; les distances des centres de gravité de ces derniers solides au plan vertical YY sont $\frac{4(R^3 - r^3)\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{3(R^3 - r^3)\alpha}$ et $\frac{9(R^3 - r^3)(\alpha - \frac{1}{2}\sin \alpha)}{32(R^3 - r^3)(1 - \cos^2 \alpha)}$, la même précisément que pour le solide double OMM'RR'; d'où l'on conclut les expressions

$$p = \frac{1}{2}(R^3 - r^3)R\alpha - \frac{1}{2}(R^3 - r^3)(1 - \cos^2 \alpha), \quad d = \frac{\frac{1}{2}(R^3 - r^3)R\sin^2 \frac{1}{2} \alpha - \frac{9}{32}(R^3 - r^3)(\alpha - \frac{1}{2}\sin \alpha)}{P}$$

au moyen desquelles on trouvera sans peine les formules (G), (F), (f) et (F'), (F'') ainsi que l'équation (N).

Quart et volume des deux
voûtes.

77). L'expression (1) intégrée depuis $\alpha = 0$, jusqu'à $\alpha = 90^\circ$, donne $2r^2$ dont le quadruple $8r^2$ exprime l'aire de la voûte ou arc de cloître; c'est le double de la surface du carré AA'A'A.

L'intégrale précédente, multipliée par $\frac{1}{2}r$ exprimera le volume intérieur de la voûte, lequel est par conséquent les deux tiers de celui du prisme circonscrit.

Quant à la voûte d'arête, on en obtiendra l'aire ou le volume, en retranchant de la somme des aires ou des volumes des deux demi-cylindres, l'aire ou le volume de la voûte en arc de cloître.

Observation sur l'application des
formules; Table suivante.

78) J'ai établi les formules par un procédé simple et uniforme on n'employant d'autres principes que ceux des centres de gravité de l'arc de cercle et de la pyramide et j'ai cherché à donner aux expressions analytiques les formes les plus commodés pour l'application. Il faut avouer néanmoins que cette application ne laisse pas d'exiger encore des calculs assez pénibles; on les abrégerait beaucoup au moyen d'une table des valeurs de la fonction $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ qui se reproduit dans la plupart des formules; c'est pour qu'on j'ai calculé ces valeurs et leurs logarithmes dont j'insère la table ici.

Table.

Cette notice a facilité les applications des formules.

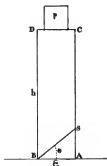
79). Table des valeurs de la fonction $\frac{A}{\sin A}$ et de leurs Logarithmes; v.

A	$\frac{A}{\sin A}$	Logarithmes	A	$\frac{A}{\sin A}$	Logarithmes	A	$\frac{A}{\sin A}$	Logarithmes
0	1,00000	0,0000000	36	1,06896	0,0289612	56	1,17894	0,0714912
5	1,00181	0,0008514	37	1,07304	0,0306161	57	1,18621	0,0741609
10	1,00510	0,002072	38	1,07726	0,0323190	58	1,20133	0,0768849
15	1,01151	0,0049725	39	1,08161	0,0340702	59	1,19367	0,0796638
20	1,02060	0,0088557	40	1,08610	0,0358699	60	1,20920	0,0824981
21	1,02275	0,0097675	41	1,09073	0,0377184	61	1,21727	0,0853879
22	1,02500	0,0107247	42	1,09551	0,0396158	62	1,22556	0,0883342
23	1,02737	0,0117272	43	1,10043	0,0415626	63	1,23406	0,0913370
24	1,02985	0,0127753	44	1,10550	0,0435588	64	1,24279	0,0943972
25	1,03243	0,0138691	45	1,11072	0,0456049	65	1,25174	0,0975151
26	1,03516	0,0150087	46	1,11609	0,0477011	66	1,26093	0,1006911
27	1,03799	0,0161944	47	1,12163	0,0498475	67	1,27036	0,1039261
28	1,04084	0,0174261	48	1,12731	0,0520451	68	1,28003	0,1072204
29	1,04401	0,0187042	49	1,13316	0,0542936	69	1,28996	0,1105748
30	1,04720	0,0200287	50	1,13918	0,0565934	70	1,30014	0,1139896
31	1,05039	0,0213998	51	1,14537	0,0589450	71	1,31059	0,1174657
32	1,05359	0,0228182	52	1,15172	0,0613486	72	1,32137	0,1209949
33	1,05750	0,0242825	53	1,15826	0,0638047	73	1,34270	0,1246159
34	1,06119	0,0257946	54	1,16497	0,0663136	74	1,34920	0,12829521
35	1,06501	0,0273561	55	1,17186	0,0688756	75	1,37079	0,1319199

80) Les constructions géométriques pourraient autre fournir des moyens d'abréviation et l'on a déjà fait quelques tentatives à cet égard; M^{rs} Lamé et Chapeyron ont démontré (Annales des mines, tome 8, page 313) qu'en général, si l'on suppose le joint de rupture vertical, sa position est telle que la tangente au point relatif du centre va couper l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse qui tend à se détacher; mais cette hypothèse sur la direction du joint de rupture ne paraît pas naturelle.

De la résistance des supports en maçonnerie.

figure 20.



81). Soit ABCD une pile ou un pilier en maçonnerie, sollicitée par son propre poids et par un poids étranger p.

Désignons par h la hauteur AD, par e l'épaisseur AB = CD, par f le rapport du frottement à la pression, par δ la densité de la maçonnerie, par θ l'angle BAS qu'une section AB fait avec l'horizon et par s l'action qui s'exerce parallèlement à cette section; on trouvera sans difficulté...

$$s = (p + \delta e h - \frac{1}{2} \delta e^2 \tan \theta) \sin \theta - (p + \delta e h - \frac{1}{2} \delta e^2 \tan \theta) f \cos \theta - \frac{\gamma e}{\cos \theta},$$

expression qui prend la forme

$$s = \frac{-(p + \delta e h) f - \gamma e + (p + \delta e h + \frac{1}{2} \delta e^2 f) \tan \theta - (\gamma e + \frac{1}{2} \delta e^2) \tan^2 \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{N}{D}$$

Cela posé, pour déterminer l'angle de la section de plus grande action et on même temps pour exprimer que cette plus grande action s'annule, on égalera à zéro le numérateur N et sa différentielle prise par rapport à $\tan \theta$, ce qui donnera

$$N = 0 \dots (1), \quad \frac{dN}{d \tan \theta} = p + \delta e h + \frac{1}{2} \delta e^2 f - 2(\gamma e + \frac{1}{2} \delta e^2) \tan \theta = 0 \dots (2)$$

Ces deux équations feront connaître l'angle de rupture et la plus grande ou la plus petite valeur que puisse avoir l'une quelconque des autres quantités qu'elles renferment sans que le massif se rompe.

82). D'abord si l'on considère e comme inconnue et que pour simplifier on néglige le frottement ou qu'on fasse f = 0, la comparaison des équations (1) et (2) produira les deux équivalences

$$(p + \delta e h) \tan \theta - 2\gamma e = 0 \dots (3), \quad (1 + \frac{1}{2} \delta e) \tan^2 \theta - \gamma = 0 \dots (4),$$

et chacune des inconnues e, $\tan \theta$ sera donnée par une équation du 3^e degré; par exemple, e pour l'équation

$$2\gamma(1 + \frac{1}{2} \delta e) e^2 = (p + \delta h e)^2,$$

qui ordonnée par rapport à e aurait les deux racines réelles négatives et n'a par conséquent qu'une racine réelle positive. Cette racine sera la moindre épaisseur que puisse avoir le massif sous la hauteur h et la charge p, tandis que h serait la plus grande hauteur qu'il pût avoir sous l'épaisseur e et la charge p.

83). En faisant abstraction du poids de la partie supérieure ADCB, c'est-à-dire, en faisant δ = 0, on tire des équations (3) et (4)

$$e = \frac{p}{2\gamma}, \quad \tan \theta = 1.$$

84). Supposons $p=0$, nous aurons, par les mêmes équations

$$\varepsilon = \frac{\delta^2 h^2 - 4\gamma^2}{2\gamma\delta}, \quad \tan\theta = \frac{2\gamma}{\delta h},$$

cette valeur de ε sera la moindre épaisseur que puisse avoir le massif pour se soutenir sous son propre poids, ou bien h sera la plus grande hauteur à laquelle il puisse être élevé sur l'épaisseur ε .

85). Prenant ensuite $p+\delta\varepsilon h$ pour inconnue, on obtient

$$p+\delta\varepsilon h = \varepsilon \left[2\gamma + \frac{1}{2}\delta\varepsilon \right] f + \sqrt{2\gamma(\varepsilon\gamma + \delta\varepsilon)(1+f^2)}, \quad \tan\theta = f + \sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{2\gamma + \delta\varepsilon}}.$$

Ce sont la valeur de l'angle de rupture et la plus grande valeur que puisse avoir la quantité $p+\delta\varepsilon h$, tant que le pilier se rompt; d'où résulte la plus grande hauteur qu'on puisse donner à ce pilier ou le plus grand poids dont on puisse le charger.

86). Lorsqu'on néglige le poids de la partie supérieure ou qu'on fait $\delta=0$, ces valeurs deviennent

$$p+\delta\varepsilon h = 2\gamma\varepsilon(1+\sqrt{1+f^2}), \quad \tan\theta = f + \sqrt{1+f^2}$$

et quand $f=0$, ou qu'on néglige le frottement,

$$p+\delta\varepsilon h = \varepsilon\sqrt{2\gamma(\varepsilon\gamma + \delta\varepsilon)}, \quad \tan\theta = \sqrt{\frac{2\gamma}{2\gamma + \delta\varepsilon}};$$

expressions qui, si l'on fait en outre $\delta=0$, reproduisent:

$$\varepsilon = \frac{p}{2\gamma}, \quad \tan\theta = 1.$$

Ces derniers résultats ont été donnés par Coulomb, dans le *Mémoire* cité.

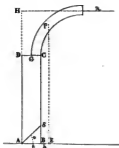
87). La discussion précédente avait eu même temps pour objet de prouver que le signe + du radical est le seul qui convienne à la question matérielle.

88). On n'oubliera pas de prendre pour γ et ε les valeurs propres à la matière du mortier ou de la pierre, selon que le massif sera bâti en petits moellons ou en pierres un peu grandes.

89). Maintenant supposons que le massif ABCD, soit de plus sollicité par une force horizontale λ . Cette force tendra à le rompre par glissement et par rotation; mais l'observation apprend qu'en général la rupture s'opère de la même manière qu'il suffira par conséquent de considérer.

Soit donc I la hauteur AH , b la distance horizontale BE du centre de gravité de p au point B , M le moment de rotation autour de l'axe A par lequel, passe le plan de rupture AB et γ' la cohésion obtenue

figure 21.



perpendiculairement à AB, on aura

$$\pi = \lambda L - p(b + \varepsilon) - \frac{1}{2} \delta \varepsilon^2 h + \frac{1}{2} \delta \varepsilon^3 \tan \theta - \frac{1}{2} \gamma' \varepsilon^2 (1 + \tan^2 \theta) = 0 \dots \dots (5)$$

$$\frac{d\pi}{d \tan \theta} = \frac{1}{2} \delta \varepsilon^3 - \gamma' \varepsilon^2 \tan \theta = 0 \dots \dots (6)$$

et par l'élimination de $\tan \theta$;

$$\lambda L - pb - p\varepsilon - \frac{1}{2} (\gamma' + \delta h) \varepsilon^2 + \frac{1}{18} \frac{\delta^2}{\gamma'} \varepsilon^4 = 0 \dots \dots (7)$$

équation qui résolue par rapport à ε donnera la moindre épaisseur dont le matif soit susceptible.

90). On voit par l'équation (6) que la valeur de $\tan \theta$ est en raison inverse de la cohésion γ' : si l'on trouvait $\theta > BAC$, on prendrait $\theta = BAC$, c'est-à-dire,

$$\tan \theta = \frac{h}{\varepsilon} \dots \dots (8)$$

et l'équation (5) donnerait

$$\varepsilon^2 + \frac{6p}{3\gamma' + \delta h} \varepsilon - \frac{6(\lambda L - pb - \frac{1}{2} \gamma' h)}{3\gamma' + \delta h} = 0 \dots \dots (9)$$

ou simplement

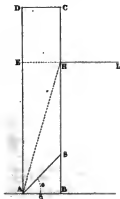
$$\varepsilon^2 + \frac{6p}{\delta h} \varepsilon - \frac{6(\lambda L - pb)}{\delta h} = 0 \dots \dots (10)$$

si la cohésion était tout-à-fait nulle.

91) Lorsque la cohésion intrinsèque du matif sera très-grande on comparera de son adhérence γ'' à la base AB, on aura

$$\tan \theta = 0, \varepsilon^2 + \frac{2p}{\gamma'' + \delta h} \varepsilon - \frac{2(\lambda L - pb)}{\gamma'' + \delta h} = 0 \dots \dots (11)$$

figure 22.



92). Il peut arriver que le poids p ne soit que celui d'une partie CDEH du matif, qui se trouverait au-dessus du point H; alors désignant BC par L et BH par h , on permutera les lettres L, h et l'on fera $p=0$, dans l'équation (5) de laquelle on déduira, au lieu des équations (9), (10), (11), dans le cas de $\tan \theta = \frac{h}{\varepsilon}$, $\gamma' = 0$ et $\tan \theta = 0$, $\gamma' = \gamma''$ les valeurs

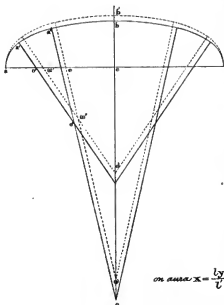
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{\delta h (2\lambda - \gamma' h)}{3\gamma' + \delta (2L - h)}}, & \varepsilon &= \sqrt{\frac{6h\lambda}{\delta (2L - h)}}, \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{2h\lambda}{\gamma'' + \delta L}} \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

qu'il est aisé de trouver directement et qui deviennent

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{3L(2\lambda - \gamma' L)}{3\gamma' + \delta L}}, & \varepsilon &= \sqrt{\frac{6\lambda}{\delta}}, \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{2L\lambda}{\gamma'' + \delta L}} \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

quand $h=L$ ou que la force λ est appliquée à l'extrémité C.

figure 15



on aura $x = \frac{ly}{l}$, $z = \frac{py}{l}$ et comme $x + b = z + a - y$, il s'en suivra,

$$x = \frac{(a-b)l}{l+l-p}, \quad y = \frac{(a-b)l'}{l+l-p} \dots \dots (4)$$

de là les rayons r, r', r'' et les angles qu'ils font avec la verticale. Quel que soit le nombre N des centris, si l'on en retranche l'unité et que n soit la moitié du reste, on trouve que $n = \frac{N-1}{2}$, il n'y aura qu'à diviser la distance Wc en n parties égales, et la distance $Wc = \frac{1}{2} Wc$, en un pareil nombre de parties qui soient entre elles comme $1, 2, 3, \dots, n$, puis joindre W avec le point de division de Wc , le plus voisin de c , et ainsi de suite. Cela fait, on trouvera les véritables centris en répétant la même division sur les lignes $oc, o'c$ déterminées au moyen des deux équations (4) dans lesquelles p sera le périmètre $W'W''W''' \dots W$. On voit que les lignes $a'o'o'' \dots o$ et $a'a'a'' \dots b$ sont analogues à une développée et sa développante; de sorte que $ob = a'o'o'' \dots o$. Mais quand même la voûte serait turbaillée au quars, il serait inutile de composer l'arc du panier d'un grand nombre d'arcs et en général il suffit d'en employer cinq.

Des formules propres aux voûtes de ce genre.

66). Comme le joint de plus grande section pour répondre à l'arc intermédiaire ou à l'arc des naissances, il faut calculer les 3 formules pour chacun de ces cas. Le premier rentre dans celui de l'arc de panier à trois centris; pour le second, on aura à considérer trois portions du profil, au lieu de deux, mais le

Voûte en arc de cercle.

procédé sera tout-à-fait analogue, que la voûte soit extradossée parallèlement ou de niveau. Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce sujet.

67). Le cintre de la voûte en arc de cercle est un seul arc qui est tout déterminé dès que l'ouverture $2a$ et la montée b sont connues. Soit r le rayon de l'arc et $2c$ l'angle au centre, entre les côtés duquel cet arc est compris; on aura $a^2 = (r-b)$, $\sin c = \frac{a}{r}$, équations d'où l'on tire

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \quad \sin c = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

et qui en général font connaître deux des quatre quantités a , b , c , r , quand les deux autres seront données.

La voûte en arc de cercle extradossée parallèlement ou de niveau, ou en chape n'est qu'un cas particulier de la voûte en plein cintre, extradossée de même, et les formules propres à celle-ci s'appliquent à l'autre, avec quelques modifications qui concernent principalement l'équation $M = PL$.

C'est où la voûte est extradossée parallèlement; formules.

figure 16.

68). Lorsque la voûte en arc de cercle sera extradossée parallèlement, on fera $d=c$, dans les expressions (G), (F) et (G), (F) propres à la voûte en plein cintre d'égale épaisseur, pourvu que la valeur de d , à laquelle répondra le maximum de chacune des deux dernières expressions, soit plus grande que c ; autrement, on y conserverait la valeur de d , relative au maximum.

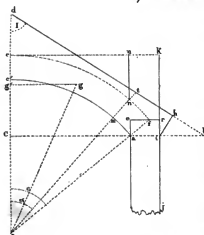
D'ailleurs, on a $a c' c f = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) c$, $g g' = \dots \dots \dots \frac{4(R^3 - r^3) \sin^2 \frac{1}{2} c}{3(R^2 - r^2) c}$; en outre, la distance du centre de

gravité g de $a c' c f$ à la verticale passant par l'arête extérieure de la base du pied-droit, sera $e + a - g g'$, et, par rapport à cette même arête, le moment de la figure $a f r j$, équivaudra au moment $\dots \dots \dots \frac{1}{2} [h + (R-r) \cos c] e^2$, du rectangle $e j$, moins le moment $\frac{1}{2} (R-r)^2 \sin c \cos c [e - \frac{1}{3} (R-r) \sin c]$, du triangle $a e f$.

En conséquence, l'équation (N) sera

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} [h + (R-r) \cos c] e^2 + \frac{1}{2} [(R^2 - r^2) c - (R-r)^2 \sin c \cos c] e + \frac{1}{6} (R-r)^3 \sin^2 c \cos c + \dots \\ & \frac{1}{2} a (R^2 - r^2) c - \frac{1}{3} (R^2 - r^3) \sin^2 \frac{1}{2} c = PL \dots \dots \end{aligned} \right\} (N)$$

Dans ce cas, la poussée turnante en général le frottement exercé sur le plan $a i$ de naissance et il faut prévenir le glissement par quelque moyen d'art.



Cas où la voûte est extradosée de niveau et en chape; formules.

(69). Pareillement, quand la voûte ou arc de cercle est extradosée soit de niveau, soit en chape, les formules (G), (g) et (P), (E) ou (F'), (F'') relatives aux cas analogues de la voûte en plein cintre, lui sont applicables, suppose la substitution, s'il y a lieu, de l'angle c à l'angle d .

Le moment de la demi-voûte par rapport à l'arête extérieure de la bête du pied-de-vent, s'obtiendra fort simplement en observant qu'il équivaut, dans le premier cas, à la somme des moments du rectangle a, j , du rectangle CK et du triangle CaO , moins le moment du secteur aOc ; et dans le second cas, à la somme des moments du rectangle a, j , des triangles Cal , CaO , moins le moment du secteur aOc ; on voit que l'équation (M) sera, pour la voûte à extrados horizontal,

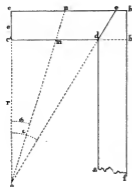
$$\frac{1}{2}(h+R-r\cos c)E + \left[a(R - \frac{1}{2}r\cos c) - \frac{1}{2}r^2c \right]E + \frac{1}{2}a \left[a(R - \frac{1}{2}r\cos c) - r^2c \right] + \frac{1}{3}r^3 \sin^2 \frac{1}{2}c = PL \dots \dots \dots (M)$$

et pour la voûte extradosée en chape,

$$\frac{1}{2}hE + \frac{1}{2} \left[B^2 \tan g I + r(a \cos c - rc) \right]E + \frac{1}{2}B^2 \tan g I \left(a - \frac{1}{2}B \tan g I \right) + \dots \dots \dots (N)$$

$$\frac{1}{2}ar \left(\frac{1}{3}a \cos c - rc \right) + \frac{1}{3}r^3 \sin^2 \frac{1}{2}c = PL \dots \dots \dots$$

Plats-baudis; formules.
figure 17.



70). On appelle plats-baudis une voûte plane dans le profil de laquelle, la douelle et l'extrados sont des droites horizontales et les joints, d'autre côté obliques aux premières, mais dirigés à un même point de l'axe vertical oc du profil. Soient l'angle $c'od = c$, $c'd = a$, $c'e = e$, $oe = r$; les surfaces des triangles $oc'm$, $oc'n$ seront $\dots \dots \dots$

$$\frac{1}{2}(e+r)^2 \tan g \delta, \frac{1}{2}r^2 \tan g \delta$$

et leur différence équivaudra à la surface p du trapèze $c'mnc$; de sorte que l'on aura $\dots \dots \dots$

$$p = \frac{1}{2}[(e+r)^2 - r^2] \tan g \delta.$$

Les distances des centres de gravité de ces triangles à la verticale oc seront $\frac{1}{3}(e+r) \tan g \delta$, $\frac{1}{3}r \tan g \delta$; divisant la différence des moments par la différence des surfaces, on trouvera la distance du centre de gravité du trapèze à la même verticale, et cette distance retranchée de $c'm$ ou $r \tan g \delta$, donnera

$$x = \frac{(3r^2 - e^2) e \tan g \delta}{3[(e+r)^2 - r^2]}; \text{ de là résulteront les expressions}$$

$$X = \frac{1}{6}[(e+r)^2 - r^2] \frac{\tan g \delta}{\tan g(\delta + \varphi)} \dots \dots \dots (G)$$

$$X = \frac{1}{6}(3r^2 - e^2) \tan g \delta \dots \dots \dots (F)$$

dont la première montre qu'abstraction faite du frottement, la force X sera constante, si les joints sont dirigés à un même point o et réciproquement. Pour le maximum de cette première, on a $\sin 2(\delta + \varphi) = \sin 2\delta$; d'où $\delta + \varphi = 90^\circ - \delta$; soit $\tan g \varphi = 0,76$, c'est-à-dire, $\varphi = 37^\circ - 14'$, il s'en suivra $\delta = 16^\circ - 15'$. La seconde n'a point de maximum absolu et sa plus grande valeur répond à $a = c$. On

substituera dans ces expressions les valeurs de α , et $\frac{\alpha}{\tan \phi}$ au lieu de r . Quant à l'équation (n), on la formera en observant que le moment de la demi-voute par rapport à l'arête extérieure de la bête du pied-droit, équivaut à la somme des moments des deux rectangles aB', cB' et l'on aura, pour l'opée de voute dont il s'agit, les formules,

$$G = 0,166576 \left(\frac{a e}{\tan \phi} + \frac{1}{2} e^2 \right) \dots (G), \quad F = \frac{3a^2 - e^2 \tan^2 \phi}{6} \dots (F)$$

$$\frac{1}{2} (e+h) E^2 + a e E + \frac{1}{2} a^2 e = (e+h) F \dots (n);$$

ainsi G augmente et F diminue à mesure que, toutes choses d'ailleurs égales, e devient plus grand, et il vient $F=0$, lorsque $e = \frac{a\sqrt{3}}{\tan \phi}$.

On s'attachera d'ailleurs si la demi-voute glissera ou non sur la bête de son pied-droit, en comparant son poids multiplié par $\tan \phi$, avec la valeur de la force P.

Des voutes sphériques ou en dôme

71). Une voute en dôme, à bête circulaire, est engendrée par la révolution d'un profil tel que a c e f autour d'un axe vertical oc. Dans ce mouvement les points m, n, ... décrivent des cercles horizontaux dont les centres sont dans l'axe, et les lignes m n, r s, ... engendrent des jointts coniques qui ont pour sommet commun le point o et qui divisent la voute en arêtes latérales dont elles-mêmes divisées en vouvoirs par des plans méridiens, c'est-à-dire, par le profil génératrice, considérée dans différentes positions.

Manière d'en établir la stabilité.

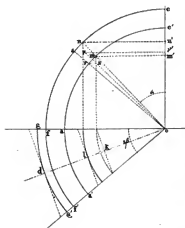
72). Pour établir la stabilité d'une voute de ce genre, on suppose cette voute partagée par des plans méridiens, en un nombre pair de demi-fusées égales, opposés deux à deux et agissant l'un contre l'autre par l'arête commune c'e; de sorte qu'on n'a plus qu'à considérer séparément deux de ces fusées opposées et les parties correspondantes du tambour ou pied-droit cylindrique, comprises entre les mêmes plans méridiens. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée par l'observation qui apprend qu'une voute en dôme qui manque de stabilité, se brise et tend à se rompre suivant des plans méridiens.

Le nombre des plans de division qu'on emploie, dépend des dimensions des vouvoirs, du mode de construction, mais surtout du nombre de parties faibles que présente le pied-droit: par exemple, si les arêtes de la voute étaient reliées entre-elles par des barres, des goupes de fer, ou par tout autre moyen, il est évident qu'il n'existerait plus de poussée; si le pied-droit devait être pressé sur son pourtour, les plans méridiens seraient au même nombre que les ouvertures et passeraient par leurs milieux.

En général, le glissement sur les jointts, de dehors ou dedans de la voute, est impossible et dans le sens contraire, il ne peut

Voute sphérique, construite paraboliquement; formules.

figure 18.



avoir lieu, comme on le sait, que sur le joint de naissance.

73). Nous nous bornerons à la voute sphérique, construite paraboliquement. Il est clair que les centres de gravité du demi-fuselage et de ses parties déterminées par les joints coniques, sont dans le plan méridien $a\bar{d}$, moyen entre les méridiens ox, ox' qui composent le fuselage. Soit α/β l'angle $\angle ox'$ ou l'arc qui le mesure dans le cercle dont le rayon est 1. Pendant que le profil ac' et,

générateur de la voute, tourne de la quantité infiniment petite $\bar{d}\beta$; l'élément de surface $mrsn$, engendre un élément de volume $\bar{d}p$, égal à la différence des deux pyramides sphériques dont les bases sont les éléments de zone, décrets par m et n . Or, l'élément de zone a pour mesure, la hauteur de la zone, multipliée par l'arc de grand cercle qui répond à l'angle $\bar{d}\beta$; mais à cause de l'égalité des angles mrx, mom' , cette hauteur est $r \sin \alpha \bar{d}\alpha$, sur la sphère du rayon r et de même $R \sin \alpha \bar{d}\alpha$, sur la sphère du rayon R ; donc $\bar{d}p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \sin \alpha \bar{d}\alpha \bar{d}\beta$. De là résultent les expressions des volumes $\bar{d}p$, p engendrés par les surfaces $mrsn$, $c'mne$, parcourant l'arc fini α/β ; savoir $\bar{d}p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \sin \alpha \bar{d}\alpha \bar{d}\beta$ et

$$p = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) (1 - \cos \alpha) \beta \dots (1)$$

Cela posé, la distance \bar{d} du centre de gravité du volume élémentaire $\bar{d}p$, au centre o , s'obtiendra en divisant par ce volume la différence des moments des deux pyramides, pris par rapport à ce même centre, et parce que le centre de gravité d'une pyramide est aux $\frac{3}{4}$ de sa hauteur à partir du sommet, on aura

$$\bar{d} = \frac{3(R^4 - r^4)}{4(R^2 - r^2)}.$$

Pour rapporter les centres de gravité et les moments à l'axe oc , observons que les centres de gravité des deux pyramides et de l'élément $\bar{d}p$ qui en est la différence, sont sur une même droite avec le point o , et que comme la dimension mr est infiniment petite, cette droite fait avec l'axe oc un angle qui ne diffère de l'angle α que d'une quantité infiniment petite aussi; donc la distance du centre de gravité de l'élément $\bar{d}p$ est simplement $\bar{d} \sin \alpha$, expression indépendante de β ; d'où il suit que les centres de gravité de tous les éléments égaux à $\bar{d}p$ qui composent le solide $\bar{d}p$, sont sur un arc de cercle horizontal dont le centre est dans l'axe oc , dont le rayon est $\bar{d} \sin \alpha$ et la longueur $\alpha/\beta \sin \alpha$; par conséquent, la distance du centre de gravité du solide $\bar{d}p$, est $\frac{\bar{d} \sin \alpha \sin \beta}{\beta}$ et son moment $\bar{d}m = \frac{1}{2} (R^4 - r^4) \sin \beta \sin \alpha \bar{d}\alpha$.

En intégrant on trouve

$$m = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \sin \beta \dots (5)$$

C'est le moment du solide p relativement à l'axe oc ; de sorte que la distance D du centre de gravité de ce solide au même axe est donnée par l'équation $D = \frac{m}{p}$.

Maintenant les distances OK , où de l'axe oc à la corde de l'arc décrit par le point m et à la tangente au milieu de l'arc engendré par le point n , sont $r \sin \alpha \cos \beta$ et $R \sin \alpha$; donc $x = r \sin \alpha \cos \beta - D$, pour le premier point, $x = R \sin \alpha - D$, pour le second point, et comme on a toujours $y = R - r \cos \alpha$ et $y = R(1 - \cos \alpha)$ ou $y = r(1 - \cos \alpha)$ et $y = r - R \cos \alpha$, respectivement pour les deux points, selon que la force X est appliquée en c ou en c' , on aura ici, en faisant, pour abréger, $\frac{R}{r} = K, \frac{1}{2} r^4 (K^2 - 1) \sin \beta = A, \frac{1}{2} r^4 (K^2 - 1) \sin \beta = B, \frac{2}{3} r^4 K (K^2 - 1) \sin \beta = A',$ et, pour un moment, $A \sin \alpha - B \alpha - (A - B) \sin \alpha \cos \alpha = N, A' \sin \alpha - B \alpha - \dots (A' - B) \sin \alpha \cos \alpha = N',$

$$X = \frac{N}{r(K - \cos \alpha)} \dots (5), \quad X = \frac{N'}{K r(1 - \cos \alpha)} \dots (6)$$

ou

$$X = \frac{N}{r(1 - \cos \alpha)} \dots (5) \quad X = \frac{N}{r(1 - K \cos \alpha)} \dots (6)$$

D'abord, égalant à zéro la différentielle de (5) relative à α , nous trouverons $(K - \cos \alpha) [2(A - B) \sin^2 \alpha - A(1 - \cos \alpha)] - A \sin^2 \alpha + B \alpha \sin \alpha + (A - B) \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0$ ou, en développant et réduisant, $2(A - B)K \sin^2 \alpha - A(K + 1)(1 - \cos \alpha) + \dots B \alpha \sin \alpha - (A - B) \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0$, et en divisant par $(A - B) \sin^2 \alpha$,

$$\text{puis,} \quad \left. \begin{aligned} 2K = (K + 1) \frac{A}{A - B} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} - \frac{B}{A - B} \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha \dots \\ F = \frac{2(A - B) \sin \alpha - A \tan \frac{1}{2} \alpha}{r} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (F)$$

supposé qu'on prenne pour la valeur de F le rapport des différentielles du numérateur de (5). Ensuite, les mêmes opérations répétées sur l'expression (6) produiront les formules,

$$\left. \begin{aligned} 2 = \frac{A'}{A' - B} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} - \frac{B}{A' - B} \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha \dots \\ F' = \frac{2(A' - B) \sin \alpha - A' \tan \frac{1}{2} \alpha}{r K} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (F')$$

dont chacune ne diffère de son analogue (F) que par le changement de A et r en A' et R .

De ces résultats, on déduit immédiatement ceux qui se rapportent aux expressions (5), (6) et qui détermineraient F' , F : pour la première (5), on changera A' en A et R en r , dans les formules (F); pour la seconde (6), il suffira de mettre r à la place de R et

réciroquement, dans les formules (F); on peut donc se dispenser d'écrire ces autres formules.

Pour former l'équation (n), on fera d'abord $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans (1) et (2), ce qui donnera le demi-fuséau et son moment par rapport à la verticale oc , et le quotient de cette dernière quantité divisée par l'autre, sera la distance du centre de gravité du fuséau à la même verticale. Si donc E et h sont l'épaisseur et la hauteur du pied-droit cylindrique, on retranchant cette distance, de $r+E$ et multipliant le reste, par le fuséau on aura le moment.
 $(r+E - \frac{3}{8} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \frac{R^2-r^2}{R^3-r^3}) \times \frac{2}{3} (R^3-r^3)$, par rapport au point d , ou ce qui revient au même, par rapport à la tangente au milieu de l'arc extérieur de la base du pied-droit; ensuite, le volume du pied-droit sera $h\beta[(r+E)^2-r^2]$ et son moment relativement à cette tangente, $[r+E - \frac{3}{8} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \frac{R^2-r^2}{R^3-r^3}] [(r+E)^2-r^2] h\beta$; ainsi

la quantité $r+E=\lambda$, prise pour inconnue, dépendra de l'équation du troisième degré,

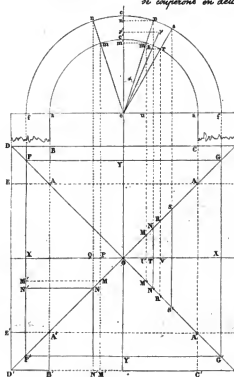
$$h(\beta - \frac{3}{8} \sin \beta) \lambda^3 - \beta [h r^2 - \frac{3}{8} (R^2-r^2)] \lambda + [\frac{3}{8} h r^2 - \frac{\pi}{8} (R^2-r^2)] \sin \beta = PL \dots (n)$$

Des voûtes d'arcades, et un arc de cloître.

figure 19

71). Considérons deux demi-cylindres à bases circulaires, de rayons égaux et dont les axes XX, YY compris dans un même plan horizontal, sont perpendiculaires entre eux. Les surfaces de ces cylindres se couperont en deux ellipses égales, situées dans les plans verticaux

AOA', AOA' , et qui partageront ces surfaces en huit nappes; quatre intérieures, égales entre-elles, limitées de part et d'autre aux ellipses d'intersection, et composant la douelle d'une voûte en arc de cloître, sur laquelle ces ellipses forment des arêtes rentrantes; quatre extérieures, pareillement égales entre elles, limitées, d'une part, aux cercles verticaux AA, AA' , AA', AA' , d'autre part, aux ellipses d'intersection, et composant la douelle d'une voûte d'arête, sur laquelle ces ellipses forment des arêtes saillantes. C'est de ces voûtes, les plus simples de leur espèce, et auxquelles nous supposons une épaisseur constante, que nous allons maintenant nous occuper.



Voute en arc de cloître, Ségale
équivalent; formules.

75). Pour concevoir l'équilibre de la voute en arc de cloître, je la regarde comme décomposée en quatre parties indépendantes, telles que OFF' , par les plans verticaux des ellipsoïdes. Le joint vertical se réduira ici à une droite que j'appellerai l'axe de la clef; deux parties opposées OFF' , OBB' de la voute, agissent l'une sur l'autre en se poutant par cet axe.

Il est évident que les centres de gravité du quars de voute, OBB' et de ses parties déterminées par les plans de joint mn , rs BO se trouvent dans le plan vertical OX ; or, l'élément de volume, dp , projeté verticalement on $mrsn$ et horizontalement on $MRR'M'N'S'SN$, est la différence de deux pyramides qui ont pour sommet commun le point O et pour bases, les surfaces élémentaires projetées l'une en mrs et $MRR'M'$, l'autre en ns et $NSS'N'$, et dont chacune équivaut à sa projection horizontale, multipliée par $\cos \alpha$. Mais $UV = rz = r \cos \alpha d\alpha$; $MM' = 2OU = 2r \sin \alpha$; donc la première surface élémentaire et semblablement la seconde, sont exprimées par

$$2r^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \dots (1), \quad 2R^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \dots (2);$$

ainsi, on a $dp = \frac{2}{3}(R^3 - r^3) \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha$, et en prenant l'intégrale depuis $\alpha = 0$,

$$p = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \alpha) \dots (3)$$

c'est la mesure du solide $OBB'SNN'$.

Le raisonnement qu'on a fait dans le cas de la voute sphérique s'applique ici et l'on trouve pour la distance du centre de gravité de dp au point O , la même expression $\frac{2(R^4 - r^4)}{4(R^3 - r^3)}$ que pour celle du solide d^3p considérée dans le premier cas, expression qui multipliée aussi par $\sin \alpha$ donnera la distance au plan vertical YY ; on voit qu'on aura
 $dm = \frac{2}{3}(R^4 - r^4) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha$, dont l'intégrale, prise depuis $\alpha = 0$, sera

$$m = \frac{2}{64}(R^4 - r^4)\left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha\right) \dots (4)$$

c'est le moment du solide p par rapport à ce plan YY ; de là

$$\bar{d} = \frac{m}{p} = \frac{2(R^4 - r^4)\left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha\right)}{3(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \alpha)} \dots (5)$$

distance du centre de gravité de p au même plan. Mais $x = r \sin \alpha - d$, pour le point m et $x = R \sin \alpha - d$, pour le point n ; donc on a respectivement,

$$px = r^4 \sin \alpha \left[\frac{2}{3}(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \alpha) - \frac{1}{16}(R^4 - r^4) \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{4 \sin \alpha} \right) \right],$$

$$px = r^4 \sin \alpha \left[\frac{2}{3}K(R^3 - r^3)(1 - \cos^3 \alpha) - \frac{1}{16}(K^4 - r^4) \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{4 \sin \alpha} \right) \right];$$

et comme on a encore $y = R - r \cos \alpha$ et $y = R(1 - \cos \alpha)$ ou $y = r(1 + \cos \alpha)$ et $y = r - R \cos \alpha$, respectivement pour les deux points et selon que la force X réside en c ou en c' , il viendra les formules

$$\frac{2r^3(K^2-1)(1-\cos^2\alpha)}{g \tan(\theta+\alpha)} \dots \dots \dots (\theta),$$

$$X = \frac{Px}{r(K-\cos\alpha)} \dots \dots \dots (F), \quad X = \frac{Px}{rK(1-\cos\alpha)} \dots \dots \dots (F);$$

$$X = \frac{Px}{r(1-\cos\alpha)} \dots \dots \dots (F'), \quad X = \frac{Px}{r(1-K\cos\alpha)} \dots \dots \dots (F')$$

Au moyen des expressions (3) et (5) dans lesquelles on fera $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et en observant que $CC' = 1(r+\varepsilon)$ on trouvera pour déterminer l'épaisseur du pied-droit, l'équation

$$h\varepsilon^3 + h r \varepsilon^2 + \frac{1}{9}(R^3 - r^3)\varepsilon + \frac{1}{3}r(R^3 - r^3) - \frac{1}{32}\pi(R^4 - r^4) = PL \dots \dots (n).$$

Voici l'analyse d'équale équation;
formules.

76). On concevra l'équilibre de la voûte, on la considérant comme décomposée en huit parties indépendantes, telles que $OF'Y$, $OF'X$ \widehat{O} par les plans verticaux XX , YY des axes et ceux AOA' , AOA' des elliptes. Chaque double partie $OXF'Y$ et les deux parties collatérales $OG'Y$, OFX se poutcheront mutuellement par les joints verticaux que les plans des axes déterminent. Le pilier $A'B'D'E'$ qui soutient cette double partie supportera en même temps les poutches des deux parties collatérales; de sorte que la résultante de ces poutches, égales entre elles et disposées symétriquement par rapport à lui, se trouvera dans le plan OD' et tendrait à faire tourner ce pilier autour du point D' de sa base; mais, comme la pierre se briserait en ce point, il vaudra mieux établir l'équilibre du pilier, on le regardant comme mobile autour de l'arête $E'D'$ et simplement comme chargé de la partie $OF'Y$ et poutché par la partie opposée $OG'Y$; il acquerra ainsi une plus forte épaisseur. En effet soit P' le poids d'une partie $OF'Y$, D la distance de son centre de gravité au plan vertical $A'B'$ de la naissance; la condition de l'équilibre de rotation autour de l'arête $E'D'$ sera exprimée par l'équation $\frac{1}{2}h\varepsilon^3 + P'(\varepsilon + D) = PL$. On peut donner à cette équation la forme $\frac{1}{\sqrt{2}}h\varepsilon^3 + 1P'[\frac{1}{2}(\varepsilon + D)\sqrt{2}] = PL\sqrt{2}$, sous laquelle elle exprimerait la condition de l'équilibre de rotation autour du point D' entre le pilier et les deux parties $OF'Y$, OFX , & les centres de gravité de ces parties étaient dans les plans $F'G'$, $F'F$; mais, il est évident que ces centres tomberont dans les angles $OF'Y$, OFX ; par conséquent la distance de la résultante $1P'$ des poids des deux parties, au point D , supportera $(\varepsilon + D)\sqrt{2}$; d'où il suit que la valeur de ε sera

moindre dans l'hypothèse de la rotation autour du point D'.

Cela posé, le solide OYN NMM', que nous avons à considérer, est la différence entre le solide total OYN QPM = $\frac{1}{3}(R^2 - r^2)R\lambda$ et le solide partiel ONQPM = ONTUM = $\frac{1}{3}(R^2 - r^2)(1 - \cos^2 \lambda)$; les distances des centres de gravité de ces derniers solides au plan vertical YY sont $\frac{4(R^2 - r^2)\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{3(R^2 - r^2)\lambda}$ et $\frac{2(R^2 - r^2)(\lambda - \frac{1}{2}\sin 4\lambda)}{3(R^2 - r^2)(1 - \cos^2 \lambda)}$, la même précisément que pour le solide double OMM'R'R; d'où l'on conclut les expressions

$$p = \frac{1}{3}(R^2 - r^2)R\lambda - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)(1 - \cos^2 \lambda), \quad d = \frac{\frac{4}{3}(R^2 - r^2)R\sin^2 \frac{\lambda}{2} - \frac{2}{3}(R^2 - r^2)(\lambda - \frac{1}{2}\sin 4\lambda)}{P}$$

au moyen desquelles on trouvera sans peine les formules (G), (F), (I) et (F'), (F'') ainsi que l'équation (N).

Cherchons et volumes des deux voûtes.

177). L'expression (1) intégrée depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = 90^\circ$, donne $2r^2$ dont le quadruple $8r^2$ exprime l'aire de la voûte en arc de cloître; c'est le double de la surface du carré AAA'A.

L'intégrale précédente, multipliée par $\frac{1}{2}r$ exprimera le volume intérieur de la voûte, lequel est par conséquent les deux tiers de celui du prisme circonscrit.

Quant à la voûte d'arête, on en obtiendra l'aire ou le volume, en retranchant de la somme des aires ou des volumes des deux demi-cylindres, l'aire ou le volume de la voûte en arc de cloître.

Observation sur l'application des formules; table auxiliaire.

178) J'ai établi les formules par un procédé simple et uniforme en n'employant d'autres principes que ceux des centres de gravité de l'arc de cercle et de la pyramide et j'ai cherché à donner aux expressions analytiques les formes les plus commodes pour l'application. Il faut avouer néanmoins que cette application ne laisse pas d'exiger encore des calculs assez pénibles; on les abrégerait beaucoup au moyen d'une table des valeurs de la fonction $\frac{\sin \lambda}{\lambda}$ qui se reproduit dans la plupart des formules; c'est pour qu'on j'ai calculé ces valeurs et leurs logarithmes dont j'insère la table ici.

Table.

Cette notice a facilité les applications des formules.

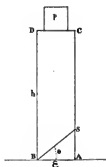
79). Table des valeurs de la fonction $\frac{A}{\sin A}$ et de leurs Logarithmes; v.

A	$\frac{A}{\sin A}$	Logarithmes	A	$\frac{A}{\sin A}$	Logarithmes	A	$\frac{A}{\sin A}$	Logarithmes
0	1,00000	0,0000000	36	1,06896	0,0289612	56	1,17896	0,0714912
5	1,00121	0,0005514	37	1,07304	0,0306161	57	1,18621	0,0761609
10	1,00510	0,0020721	38	1,07726	0,0323190	58	1,20133	0,0768849
15	1,01151	0,0049725	39	1,08161	0,0340702	59	1,21937	0,0796638
20	1,02060	0,0088557	40	1,08610	0,0358699	60	1,24020	0,0849881
21	1,02275	0,0097675	41	1,09073	0,0377124	61	1,26127	0,0853879
22	1,02500	0,0107247	42	1,09551	0,0396158	62	1,28556	0,0883342
23	1,02737	0,0117272	43	1,10043	0,0415626	63	1,31406	0,0913370
24	1,02985	0,0127753	44	1,10550	0,0435588	64	1,34279	0,0943392
25	1,03245	0,0138691	45	1,11072	0,0456049	65	1,38174	0,0973515
26	1,03516	0,0150087	46	1,11609	0,0477011	66	1,42093	0,1006911
27	1,03799	0,0161946	47	1,12163	0,0498478	67	1,47036	0,1039261
28	1,04084	0,0174261	48	1,12731	0,0520451	68	1,52003	0,1072206
29	1,04401	0,0187042	49	1,13316	0,0542936	69	1,58996	0,1105748
30	1,04720	0,0200287	50	1,13918	0,0565934	70	1,60014	0,1139896
31	1,05099	0,0215998	51	1,14537	0,0589450	71	1,31059	0,1174657
32	1,05535	0,0232182	52	1,15172	0,0613486	72	1,35517	0,1219349
33	1,05750	0,0242885	53	1,15826	0,0638047	73	1,41780	0,1261539
34	1,06119	0,0257946	54	1,16497	0,0663136	74	1,48920	0,1292521
35	1,06501	0,0273541	55	1,17186	0,0688756	75	1,57079	0,1321199

80) Les constructions géométriques pourraient autre fournir des moyens d'abréviation et l'on a déjà fait quelques tentatives à cet égard; M^{rs} Lamé et Clapeyron ont démontré (Annales des mines, tome 8, page 813) qu'en général, si l'on suppose le joint de rupture vertical, sa position est telle que la tangente au point relatif du centre va couper l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse qui tend à se détacher; mais cette hypothèse sur la direction du joint de rupture ne paraît pas naturelle.

De la résistance des supports en maçonnerie.

figure 20.



81). Soit $ABCD$ une pile ou un pilier en maçonnerie, sollicité par son propre poids et par un poids étranger p .

Désignons par h la hauteur AD , par e l'épaisseur $AB = CD$, par f le rapport du frottement à la pression, par δ la densité de la maçonnerie, par θ l'angle BAS qu'une section AS fait avec l'horizon et par α l'action qui s'exerce parallèlement à cette section; on trouvera sans difficulté... —

$$\alpha = (p + \delta e h - \frac{1}{2} \delta e^2 \tan \theta) \sin \theta - (p + \delta e h - \frac{1}{2} \delta e^2 \tan \theta) f \cos \theta - \frac{\gamma e}{\cos \theta},$$

expression qui prend la forme

$$\alpha = \frac{-(p + \delta e h) f - \gamma e + (p + \delta e h + \frac{1}{2} \delta e^2 f) \tan \theta - (\gamma e + \frac{1}{2} \delta e^2) \tan^2 \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{N}{B}$$

Cela posé, pour déterminer l'angle de la section de plus grande action et on même temps pour exprimer que cette plus grande action s'annule, on égalera à zéro le numérateur N et la différentielle prise par rapport à $\tan \theta$, ce qui donnera

$$N = 0 \dots (1), \quad \frac{dN}{d \tan \theta} = p + \delta e h + \frac{1}{2} \delta e^2 f - 2(\gamma e + \frac{1}{2} \delta e^2) \tan \theta = 0 \dots (2)$$

Ces deux équations feront connaître l'angle de rupture et la plus grande ou la plus petite valeur que puisse avoir l'une quelconque des autres quantités qu'elles renferment sans que le massif se rompe.

82). D'abord si l'on considère e comme inconnue et que pour simplifier on néglige le frottement ou qu'on fasse $f = 0$, la comparaison des équations (1) et (2) produira les deux équivalences

$$(p + \delta e h) \tan \theta - 2\gamma e = 0 \dots (3), \quad (\delta + \frac{1}{2} \delta e) \tan^2 \theta - \gamma = 0 \dots (4),$$

et chacune des inconnues e , $\tan \theta$ sera donnée par une équation du 3^e degré; par exemple, e par l'équation

$$2\gamma(\delta + \frac{1}{2} \delta e) e^2 = (p + \delta h e)^2,$$

qui ordonnée par rapport à e aurait les deux racines réelles négatives et n'a par conséquent qu'une racine réelle positive. Cette racine sera la moindre épaisseur que puisse avoir le massif sous la hauteur h et la charge p , tandis que h serait la plus grande hauteur qu'il pût avoir sous l'épaisseur e et la charge p .

83). En faisant abstraction du poids de la partie supérieure $ADCB$, c'est-à-dire, en faisant $\delta = 0$, on tire des équations (3) et (4)

$$e = \frac{p}{2\gamma}, \quad \tan \theta = 1.$$

84). Supposons $p=0$, nous aurons, par les mêmes équations

$$\varepsilon = \frac{\delta^2 h^2 - 4\gamma^2}{2\gamma\delta}, \quad \tan\theta = \frac{2\gamma}{\delta h},$$

cette valeur de ε sera la moindre épaisseur que puisse avoir le massif pour se soutenir tout son propre poids, ou bien h sera la plus grande hauteur à laquelle il puisse être élevé sur l'épaisseur ε .

85). Prenant ensuite $p+\delta\varepsilon h$ pour inconnue, on obtient

$$p+\delta\varepsilon h = \left[\left(2\gamma + \frac{1}{2}\delta\varepsilon \right) f + \sqrt{2\gamma(\gamma+\delta\varepsilon)(1+f^2)} \right], \quad \tan\theta = f + \sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{2\gamma+\delta\varepsilon}}.$$

Ce sont la valeur de l'angle de rupture et la plus grande valeur que puisse avoir la quantité $p+\delta\varepsilon h$, tant que le pilier se rompe; d'où résulte la plus grande hauteur qu'on puisse donner à ce pilier ou le plus grand poids dont on puisse le charger.

86). Lorsqu'on néglige le poids de la partie supérieure ou qu'on fait $\delta=0$, ces valeurs deviennent

$$p+\delta\varepsilon h = 2\gamma\varepsilon(f+\sqrt{1+f^2}), \quad \tan\theta = f+\sqrt{1+f^2}$$

et quand $f=0$, ou qu'on néglige le frottement,

$$p+\delta\varepsilon h = \varepsilon\sqrt{2\gamma(\gamma+\delta\varepsilon)}, \quad \tan\theta = \sqrt{\frac{2\gamma}{2\gamma+\delta\varepsilon}};$$

expressions qui, si l'on fait en outre $\delta=0$, reproduisent:

$$\varepsilon = \frac{p}{2\gamma}, \quad \tan\theta = 1.$$

Ces derniers résultats ont été donnés par Coulomb, dans le *Mémoire* cité.

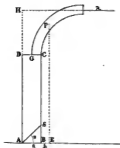
87). La discussion précédente avait en même temps pour objet de prouver que le signe + du radical est le seul qui convienne à la question matérielle.

88). On n'oubliera pas de prendre pour γ et ε les valeurs propres à la matière du mortier ou de la pierre, selon que le massif sera bâti en petits moellons ou en pierres un peu grandes.

89). Maintenant supposons que le massif ABCD, soit de plus sollicité par une force horizontale λ . Cette force tendra à le rompre par glissement et par rotation; mais l'observation apprend qu'en général la rupture s'opère de la seconde manière qu'il suffira par conséquent de considérer.

Soit donc L la hauteur AH, B la distance horizontale BE du centre de gravité de p au point B, M le moment de rotation autour de l'axe A par lequel passe le plan de rupture AB et γ' la cohésion obtenue

figure 21.



perpendiculairement à AB, on aura

$$n = \lambda L - p(b + \varepsilon) - \frac{1}{2} \delta \varepsilon^2 h + \frac{1}{3} \delta \varepsilon^3 \tan \theta - \frac{1}{2} \gamma' \varepsilon^2 (1 + \tan^2 \theta) = 0 \dots \dots (5)$$

$$\frac{d n}{d \tan \theta} = \frac{1}{3} \delta \varepsilon^3 - \gamma' \varepsilon^2 \tan \theta = 0 \dots \dots (6)$$

et par l'élimination de $\tan \theta$;

$$\lambda L - p b - p \varepsilon - \frac{1}{2} (\gamma' + \delta h) \varepsilon^2 + \frac{1}{18} \frac{\delta^2}{\gamma'} \varepsilon^6 = 0 \dots \dots (7)$$

équation qui résolue par rapport à ε donnera la moindre épaisseur dont le matif soit susceptible.

90). On voit par l'équation (6) que la valeur de $\tan \theta$ est en raison inverse de la cohésion γ' : si l'on trouvait $\theta > BAC$, on prendrait $\theta = BAC$, c'est-à-dire,

$$\tan \theta = \frac{h}{\varepsilon} \dots \dots (8)$$

et l'équation (5) donnerait

$$\varepsilon^2 + \frac{6p}{3\gamma' + \delta h} \varepsilon - \frac{6(\lambda L - pb - \frac{1}{2} \gamma' h^2)}{3\gamma' + \delta h} = 0 \dots \dots (9)$$

ou simplement

$$\varepsilon^2 + \frac{6p}{\delta h} \varepsilon - \frac{6(\lambda L - pb)}{\delta h} = 0 \dots \dots (10)$$

si la cohésion était tout-à-fait nulle.

91) Lorsque la cohésion intrinsèque du matif sera très-grande en comparaison de son adhérence γ'' à la base AB, on aura

$$\tan \theta = 0, \varepsilon^2 + \frac{2p}{\gamma'' + \delta h} \varepsilon - \frac{2(\lambda L - pb)}{\gamma'' + \delta h} = 0 \dots \dots (11)$$

92). Il peut arriver que le poids p ne soit que celui d'une partie CDEH du matif, qui se trouverait au-dessus du point H; alors désignant BC par L et BH par h , on permutera les lettres L, h et l'on fera $p = 0$, dans l'équation (5) de laquelle on déduira, au lieu des équations (9), (10), (11), dans le cas de $\tan \theta = \frac{h}{\varepsilon}$, $\gamma' = 0$ et $\tan \theta = 0$, $\gamma' = \gamma''$ les valeurs

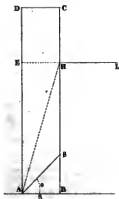
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{3h(2\lambda - \gamma' h)}{3\gamma' + \delta(2L - h)}}, & \varepsilon &= \sqrt{\frac{6h\lambda}{\delta(2L - h)}}, \\ & & \varepsilon &= \sqrt{\frac{2h\lambda}{\gamma'' + \delta L}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

qu'il est aisé de trouver directement et qui deviennent

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{3L(2\lambda - \gamma' L)}{3\gamma' + \delta L}}, & \varepsilon &= \sqrt{\frac{6\lambda}{\delta}}, \\ & & \varepsilon &= \sqrt{\frac{2L\lambda}{\gamma'' + \delta L}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

quand $h = L$ ou que la force λ est appliquée à l'extrémité C.

figure 22.



95) Ces résultats ne conviennent pas exactement aux murs de revêtement; car la poussée des terres est répartie sur l'étendue du parement intérieur et ne peut, quant à la manière d'agir pour rompre le massif, être regardée comme concentrée en un même point.

figure 21.

96). L'équation (11) quand on y fait $\gamma=0$, $\delta=1$ et $\lambda=P$ revient à l'équation d'équilibre des voûtes, $M=PL$, dans laquelle δ était facteur de tous les termes. Désignons par a la hauteur constante DH , on voit que $L=a+h$, par e l'épaisseur OG de la voûte et par e' l'épaisseur du pied-droit, pour $h=0$, cette équation (11) donnera $e'=\frac{Pa-pb}{P}$ et on aura

$$h=\frac{pP(\varepsilon-\varepsilon')}{2P-\varepsilon^2} \dots \dots (14)$$

Or, à cause de la stabilité de la voûte sur ses naissances, on a $Pa < p(b+e)$, ou $e > \frac{Pa-pb}{p}$; donc $\varepsilon' < e$. D'ailleurs il résulte du calcul des divers cas particuliers que généralement dans la pratique, e^2 et par conséquent ε^2 est moindre que $2P$; donc si, dans l'expression (14), ε croît depuis ε' jusqu'à $\sqrt{2P}$, la hauteur h croîtra en même temps, depuis zéro jusqu'à l'infini. De là cette conclusion importante que si l'équilibre est établi pour une hauteur donnée du pied-droit, le système a d'autant moins de tendance à tourner autour d'une horizontale, prise dans la face extérieure AD , que cette horizontale est plus élevée au-dessus de l'arête inférieure A . Même conclusion, à plus forte raison, dans l'hypothèse d'où dérive l'équation (9) qui donne

$$h=\frac{6p(\varepsilon-\varepsilon')}{6P-\varepsilon^2} \dots \dots (15)$$

95) Les hypothèses auxquelles se rapportent ces expressions (14) et (15) sont celles qui doivent être admises le plus fréquemment dans les constructions.

Notes.

I. Sur le Numéro 13.

Le système vers l'intérieur n'est possible que sur les joints des naissances.

1° Remarquons d'abord l'angle du joint mn avec l'horizon, il vaudra $\alpha=90^\circ-\alpha'$ et l'équation (3) considérée avec le signe — prendra la forme

$$X=p \tan(\alpha'+\varphi).$$

Cela posé, on voit d'abord que si $\alpha'=0$, ou si le joint mn prend

la portion horizontale, p devient le poids de toute la demi-voute; on voit ensuite que si à partir de là, α' augmente, p diminue, tandis que $\tan(\alpha' + \varphi)$ croît, jusqu'à ce que $\alpha' = 90^\circ - \varphi$; à ce terme, X est infini de même que $\tan(\alpha' + \varphi)$; au-delà, ces quantités deviennent négatives. Ainsi dans l'intervalle de $\alpha' = 0$ à $\alpha' = 90^\circ - \varphi$, le facteur $\tan(\alpha' + \varphi)$ croît rapidement et à la fin devient infini, tandis que par la forme qu'on a coutume de donner aux voûtes le facteur p ne décroît que lentement et ne devient nul que quand $\alpha' = 90^\circ$; par conséquent X n'admet, en général, qu'un minimum relatif qui répond à la moindre valeur de α' .

D'un autre, il est clair que de tous les joints existant dans la hauteur du pied-droit, c'est celui de la naissance, qui se trouve le moins chargé et où par conséquent le frottement oppose la moindre résistance au glissement.

2°. Il suit de là que si la voûte est susceptible de céder en glissant dans le sens $m n$, la séparation doit se faire aux joints mêmes des naissances et que dans le cas où ces joints sont horizontaux, la moindre pression à la clef, qui soit capable d'opérer le glissement, a pour mesure le produit du poids de la demi-voûte par la tangente de l'angle du frottement. On pourra donc dans ce cas se dispenser d'employer le signe — dans la formule (B).

3°. En remontant à l'équation immédiate de l'équilibre, $X(\cos \alpha' - \sin \alpha' \tan \varphi) = p(\sin \alpha' + \cos \alpha' \tan \varphi)$, on aperçoit que quand les quantités X et $\tan(\alpha' + \varphi)$ deviennent négatives, alors la composante de X parallèle à $m n$, est moindre que la force du frottement provenant de la composante perpendiculaire; car de $\alpha' > 90^\circ - \varphi$, on tire, en prenant les tangentes, $\tan \varphi \sin \alpha' > \cos \alpha'$; de sorte que la valeur de X rétruit la question dans laquelle la force p serait dirigée on sent contraire au de bas en haut, ce que rend tout-à-fait évident l'hypothèse $\alpha' = 90^\circ$, quel que soit p , laquelle conduit à $-p = X \tan \varphi$.

II. Sur le N°. 17.

C'est sur ces deux derniers modes de rupture exclusivement que Lahire a fondé sa théorie des voûtes, mais en prenant arbitrairement les joints qui s'y rapportent et considérant au lieu de la force G , les composantes suivant la perpendiculaire à l'extrémité intérieure du joint I, tant de cette force que du poids du demi-coin compris entre le joint I et le joint vertical cc .

Moins de la force capable d'opérer ce mouvement.

Force de ces joints tirant de bas à la théorie de Lahire.

III. Sur le N.^o 19.

On peut ajouter que pour un même joint, la moindre force qui agissant en un point donné de co , ferait tourner la partie supérieure autour de l'extrados, surpasse celle qui empêcherait la rotation autour de l'intrados. Car soient x, y et x', y' les bras de levier de p et de x , par rapport aux points m et n respectivement, on aura $x' > x$, $y' < y$; d'où, à plus forte raison, $\frac{x'}{y'} > \frac{x}{y}$; donc aussi $p \frac{x'}{y'} > p \frac{x}{y}$.

Il suit de là que I et I' sont respectivement moindres que les plus grandes forces qui appliquées en o et c seraient nécessaires pour faire tourner autour de l'extrados de tout joint, la partie supérieure à ce joint.

La dernière de ces forces on effect et infini; car pour en avoir la valeur, il faut exprimer que l'extrados du joint est sur la tangente au sommet du cintre de la voûte, et on a $f(\alpha) = r$, expression qu'on obtient aussi en égalant à zéro le dénominateur de la valeur x .

IV. Sur le N.^o 20.

On peut prendre; 1.^o $y = 0$; $p = 0$; cette dernière équation entraîne ordinairement $\alpha = 0$ et par suite $f(\alpha) = m'c' = 0$, valeur dont la substitution dans la première équation donne $x = 0$; la direction de X passe donc par l'intrados du joint trouvé qui est le joint vertical lui-même; 2.^o $y = 0$, $x = 0$; la deuxième, si elle est possible, signifie que la verticale abaissée du centre de gravité de p passe par l'intrados du joint trouvé; l'autre, dont on tire $x = -m'o'$, que la direction de X passe aussi par l'extrados de ce joint. Dans ces deux cas, la valeur de x est indéterminée, puisqu'elle se réduit à $\frac{0}{0}$, en vertu de deux hypothèses. 3.^o $px = 0$, $\frac{d(px)}{d\alpha} = 0$; ces équations auxquelles on parviendrait en exprimant que le maximum de la quantité px doit être nul, établissent une relation entre R et r , indépendamment de x .

Oru reste, dans la voûte en plein cintre, extradosée paraboliquement, étant donné l'intrados de la voûte et la position d'un joint, on peut toujours déterminer l'épaisseur de manière que la verticale abaissée du centre de gravité de la partie supérieure à ce joint passe par son intrados. Car la verticale menée par cet intrados et la bissectrice de cette partie supérieu-

déterminent par leur intersection, ce centre de gravité qui lui-même déterminera l'épaisseur cc' .

V. Sur le N.º 22.

1.º Nous avons déjà examiné dans la note précédente les suppositions $y=0$, $p=0$; $y=0$, $x=0$ et $px=0$, $\frac{d(px)}{da}=0$. Il reste celles-ci; 1.º $h+r+z=0$, $px=0$; dans cette hypothèse, où y a une valeur finie, la force $X = \frac{px}{y}$ est nulle, de même que le produit px ; cette force, à cause de $z=-(r+h)$, se trouve au-dessous de c' , à la distance $r+h$, c'est-à-dire, est dirigée à la base du pied-droit; 2.º $h+r+z=0$, $y=-(h+r+z)=0$; d'où $f(a) = m'c' = h+r$, résultat absurde, à moins que h ne soit nul ou négatif et la question suppose que h n'est pas au-dessous de zéro. D'ailleurs la valeur du moment serait indéterminée, et la force X ou $\frac{px}{y}$ dirigée à l'intrados du joint trouverait infini; 3.º $y \frac{d(px)}{da} - px \frac{dy}{da} = 0$, $y=-(h+r+z)=0$; d'où $f(a) = h+r$, même résultat que ci-dessus, par lequel le joint cherché serait celui de naissance, si h était nul. En général, ces deux équations résolvent la question: étant donnée $f(a) = r-h$, c'est-à-dire, la position du joint auquel doit répondre un maximum de la force X , trouver z ou le point d'application de cette force. Car soit z' la valeur de z qui, avec $f(a) = r-h$ satisfait à notre première équation, l'expression de X deviendra $\frac{px}{f(a)+z'}$ et la condition du maximum sera cette même équation renfermant z' au lieu de z , et qui donnera réciproquement $f(a) = r-h$. On voit, la valeur du moment se réduit alors à celle de px .

2.º Mais la pression effectivement produite en un point quelconque H de cc' , ne répondrait pas au joint par rapport à l'intrados duquel le moment px , de la partie supérieure, est un maximum, et qui serait le joint du plus grand moment de rupture, dans une demi-voute abandonnée subitement à elle-même; car la valeur de X , correspondante à ce maximum, serait moindre que le maximum de X , relatif au point H , et avec cette valeur, la force X appliquée en H n'empêcherait pas la partie supérieure au joint qui répond au maximum de X , de tourner autour de l'intrados de ce joint.

VI. Sur le N.° 25.

Reprenons les combinaisons que comportent les dispositions particulières de joints, et, pour chaque disposition, les relations de grandeur entre les limites correspondantes aux deux joints qu'elle concerne. Puisqu'on a toujours $(\frac{J}{J'})$, $(\frac{J}{J'})$, la disposition générale des quatre joints, pour chacune des trois combinaisons, sera telle que l'indique la figure annexée à cette combinaison, dans le tableau suivant;

1^{re} Combinaison.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{J'}; F < f, F = f, F > f. \\ \frac{J'}{J}; F' < f', F' > f' \text{ ou } = \frac{f'}{f}, F' > \underline{f'}. \end{array} \right.$$

2^{ème} Combinaison.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{J'}; F < f, F > f \text{ et } < \bar{f}, F > f \text{ et } = \bar{f}, F > \bar{f}. \\ \frac{J'}{J}; F' < f', F' = f', F' > f'. \end{array} \right.$$

3^{ème} Combinaison.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{J'}; F < f, F > f \text{ et } < \bar{f}, F > f \text{ et } = \bar{f}, F > \bar{f}. \\ \frac{J'}{J'}; F' < f', F' > f' \text{ et } < \underline{f'}, F' > f' \text{ et } = \underline{f'}, F' > \underline{f'}. \end{array} \right.$$

Maintenant, que, pour chaque combinaison, on compare chacune des relations de grandeur, qui répondent à l'un des deux dispositions qu'elle comprend, avec chacune des relations de grandeur, qui répondent à l'autre disposition, et que l'on range le résultat dans celui des trois cas de stabilité, équilibre et rupture, auquel il appartient, on aura le classement ci-après :

1^{re} Stabilité.

$(\frac{J}{J'}, \frac{J'}{J'})$; $F < f$ et $F' < f'$, il n'y a rotation autour de l'archadois d'aucun joint, et à l'exécution de l'appareil est exacte, l'arcbatement, à cause de la compressibilité dont les matériaux sont toujours doués, sera intermédiaire à c et c' et quand même, par vice d'exécution, il retomberait on c ou se transporterait on c', la stabilité n'en aurait pas moins lieu; la demi-voute soutenue on c ou en c' subsisterait.

$F < f, F' > f'$ mais $\frac{F'}{f'} \leq \frac{F}{f}$, si l'exécution est exacte, l'arcbatement à cause de la compressibilité, devient intermédiaire; si, par défaut de construction, il se trouvait on c',

alors il se reporterait vers c , puisque la rotation commencerait toujours par l'extrados de j' ; la demi-voûte soutenue en c subside, et en c' se romprait selon le premier mode.

$(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'})$; $F < f$ et $F' < f'$, si l'exécution est juste, l'arc-boutement, à cause de la compressibilité, sera intermédiaire; sinon en c ou en c' mail avec stabilité;
 $F > f$ mais $\frac{F}{f} \leq \frac{F'}{f'}$ et $F' < f'$, l'arc-boutement est intermédiaire; à moins que par vice d'exécution, il ne se trouve en c' . La demi-voûte soutenue en c se romprait et en c' subsisterait.

$(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'})$; $F < f$ et $F' < f'$, si l'exécution est exacte, l'arc-boutement, à cause de la compressibilité, est intermédiaire; sinon, il reste en c ou se transfère en c' et la stabilité a toujours lieu. La voûte soutenue en c ou en c' subsisterait.
 $F < f$ et $F' > f'$ mais $\frac{F}{f} \leq \frac{F'}{f'}$, l'arc-boutement est intermédiaire, quand même un vice d'exécution l'appellerait en c' , puisqu'il serait reporté vers c . La demi-voûte soutenue en c subsisterait et en c' se romprait selon le premier mode.
 $F > f$ mais $\frac{F}{f} \leq \frac{F'}{f'}$ et $F' < f'$, si l'exécution est exacte, l'arc-boutement, à cause de la compressibilité, est intermédiaire, puisque la rotation qui commence par l'extrados de j , le porte vers c' ; il n'y aurait pas moins stabilité si, par vice d'exécution, l'arc-boutement était fixé en c' . La demi-voûte soutenue en c se romprait selon le deuxième mode et en c' subsisterait.

$F > f$ mais $\frac{F}{f} \leq \frac{F'}{f'}$ et $F' > f'$ mais $\frac{F'}{f'} \leq \frac{F}{f}$, l'arc-boutement porté d'abord de c vers c' est reporté ensuite vers c et demeure intermédiaire, indépendamment de l'exécution et de la compressibilité, puisque la rotation commencera toujours par l'extrados soit de j soit de j' . La demi-voûte soutenue en c se romprait suivant le deuxième mode.

Résumé.

12. La combinaison

$$(\frac{j}{j}, \frac{j'}{j'})$$

quelles que soient d'ailleurs les relations de grandeur entre les limites F, f, F' et f', f', f' .

2. Les deux combinaisons et les relations respectives entre les limites,

$$\left(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}\right) \text{ avec } F < f \text{ et } \left(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}\right) \text{ avec } F' < f',$$

quelles que soient d'ailleurs les relations de grandeur entre les limites F, f, \underline{f} , pour la première de ces combinaisons et entre les limites F, f, \bar{f} , pour la seconde.

2°. Équilibre.

$\left(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}\right)$; $F = f$ et $F' < f'$, à cause que par défaut d'exécution l'arc-boutement peut demeurer en c et alors l'équilibre est à l'extradot. (Il pourrait néanmoins y avoir stabilité, si par défaut d'exécution l'arc-boutement se trouvait en c', ou si l'exécution était exacte et alors, à cause de la compressibilité, l'arc-boutement serait intermédiaire.) La demi-voute soutenue en c ou c' subsisterait et dans le premier cas à l'état d'équilibre.

$F = f$ et $F' > f'$ ^{mais} $\frac{F'}{J'} < \frac{f'}{J'}$, à cause que, par défaut d'exécution, l'arc-boutement peut demeurer en c et que s'il se trouvait en c ou entre c' ou c il serait reporté vers c; car pour tout point intermédiaire le maximum de X surpassera le minimum. La demi-voute soutenue en c serait à l'état d'équilibre et en c' se romprait selon le premier mode.

$\left(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}\right)$; $F < f$ et $F' = f'$, parce que, par un vice d'exécution, l'arc-boutement peut être transféré en c'. La demi-voute soutenue en c ou en c' subsisterait et dans second cas à l'état d'équilibre.

$F > f$ ^{mais} $\frac{F}{J} < \frac{f}{J}$ et $F' = f'$, parce que, par un vice d'exécution l'arc-boutement peut exister en c'. (Si la voute est bien exécutée, l'arc-boutement à cause de la compressibilité est intermédiaire.) La demi-voute soutenue en c se romprait selon le second mode; et en c' serait à l'état d'équilibre; d'ailleurs, si, par défaut d'exécution, l'arc-boutement persévérerait en c, il serait reporté vers c'.

Résumé.

Pour ces deux combinaisons de joints et ces égalités respectives

$$\left(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}\right), F = f \text{ et } \left(\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}\right), F' = f'$$

quelles que soient d'ailleurs les relations de grandeur entre les limites F, f, \underline{f} , quant à la première combinaison et F, f, \bar{f} , quant à la seconde.

3° Rupture.

$\left(\frac{f}{f}, \frac{f'}{f'}\right)$; $F > f + F' < f'$, à cause que, par vice d'exécution, l'arcboute-
ment peut demeurer en c et alors la rupture a lieu
selon le premier mode. (S'il était en c' ou au-dessous du
point intermédiaire pour lequel le maximum et le mi-
nimum de X sont égaux, la voute subsisterait). La
demi-voute soutenue en c se romprait et en c' subsisterait
 $F > f + F' > f' \frac{\text{max}}{\text{min}} \leq f'$, l'arcboutelement prenant toujours la
position c, quelle que soit l'exécution, puisque le maxi-
mum de X surpassera toujours le minimum et que la
rotation commence par l'extrados du joint auquel ré-
pond le minimum; La rupture suit le premier mode.
La demi-voute soutenue en c se romprait selon le
premier mode et en c' pareillement selon le premier
mode.

$\left(\frac{f}{f}, \frac{f'}{f'}\right)$; $F < f, F' > f'$, à cause que par vice d'exécution, l'arcbou-
tement peut passer en c'; ce cas appartient au second
mode. La demi-voute soutenue en c subsisterait et en
c' se romprait selon le second mode.
 $F > f \frac{\text{max}}{\text{min}} \leq F$ et $F' > f'$, l'arcboutelement se transférant en c',
que l'exécution soit exacte ou qu'un défaut d'exécution
l'ait d'abord maintenue en c; la rupture se fait selon
le second mode. La demi-voute soutenue en c se rom-
prait suivant second mode et en c' pareillement selon le
second mode.

Résumé.

Pour ces deux combinaisons et les inégalités respectives

$$\left(\frac{f}{f}, \frac{f'}{f'}\right), F > f \text{ et } \left(\frac{f}{f}, \frac{f'}{f'}\right), F' > f'$$

quelles que soient d'ailleurs les relations de grandeur entre les
limites F', f, f' pour la première combinaison et entre les limites
 F, f, F pour la seconde.

VII. Sur le N.º 29.

Raidons pour arriver à la
théorie toute la généralité.

Nous avons vu que le joint i, sur lequel la partie supérieure
peut glisser en montant, coïncide, en général, avec celui de
naissance; d'un autre côté, le joint I, sur lequel la partie su-
périeure peut glisser en descendant, se rapporte au cas où la partie
moyenne de la voute agirait comme un coin, et ce cas n'arrive

pas ordinairement, à cause du frottement des matériaux, ainsi que Coulomb l'a dit expressément dans la remarque citée. On pourra donc communément mettre à l'écart le glissement sur les joints pour s'en tenir au seul mouvement de rotation. Mais la connaissance de la limite G n'en est pas moins utile; on conçoit en effet que l'intrados d'une voûte étant donné, l'épaisseur peut augmenter au point que la verticale menée par le centre de gravité de la partie supérieure au joint J ou J' passe très-près de l'intrados de ce joint; alors la limite F ou F' qui pourra être très-petite et même tout-à-fait nulle, ne ressentira plus la pression réellement exercée à la clef; cette pression proviendra de la tendance des deux parties supérieures aux joints I , à descendre, comme un coin, en glissant le long de ces joints et répondra par conséquent à la limite G . De plus les joints de naissance d'une voûte ne sont pas toujours horizontaux: ils ne le sont jamais dans les voûtes en arc de cercle ou en plate-bande, et cette circonstance exige la considération de la limite g . Enfin presque toujours une voûte est surchargée à l'extrados et souvent elle est exposée à des chocs violents, tels que ceux des bombes, ce qui est analogue à une surcharge. Ainsi, pour ce cas, mais sur-tout pour la discussion complète d'un genre donné de voûtes, la considération des différentes limites est indispensable; c'est pourquoi nous chercherons leurs expressions particulières dans chacune des espèces de voûtes dont nous nous occuperons.

VIII. Sur le N.^o 32.

En se fondant sur ces expériences, les auteurs des nouvelles théories assimilent la voûte à un système de quatre leviers, assemblés bout-à-bout, par articulations, et chargés chacun du poids de la partie qui lui répond.

Ils distinguent les deux modes de rupture du système, puis, pour déterminer le joint intermédiaire, qu'ils appellent le joint de rupture, la plupart modifient le principe de Coulomb et considèrent, lorsqu'il s'agit du premier mode, au lieu du joint de la plus grande pression à l'extrados de la clef, non pas le joint du plus grand moment de la pression, comme nous l'avons fait, mais celui d'où résulte le maximum du rapport entre le moment des forces qui tendent à renverser le levier inférieur et le moment des forces qui tendent à

premier cas de rupture et un minimum dans le second; donc, en observant que $v = L - y$ et que X est une fonction implicite de y , on a

$$m(L-y) d(X) - (m - XL) X dy = 0,$$

et simplement

$$d(X) = 0,$$

à cause de l'équation (3). On tire de là $X = F$ ou $X = f'$, valeurs dont la substitution dans cette équation (3), donne $m = LF$ ou $m' = Lf'$, comme on l'a vu par la méthode générale.

Quant à l'état de stabilité, on aura évidemment $m > LF$ ou $m' < Lf'$.

Ajoutons cette remarque: d'une part, le poids p' se décompose en deux autres; $p' \frac{u-s}{u}$ et $p' \frac{s}{u}$, appliqués respectivement en f et en m ; d'autre part, la même équation (3), mise sous la forme, $Xv = (p + p' \frac{s}{u})u$ exprime que la résultante des forces X, p et $p' \frac{s}{u}$ appliquées en m , est dirigée selon la droite mf , de sorte que cette résultante peut-être considérée appliquée en f , où, par la décomposition elle reproduira ses composantes; d'où il suit que le point f est dans le même état que s'il était poussé horizontalement par la force X et poussé verticalement par les forces $p' \frac{u-s}{u}, p$ et $p' \frac{s}{u}$ dont la somme se réduit à $p + p'$, poids de la demi-voute; c'est un résultat que nous avons obtenu autre-ment (N° 43).

Or, soient c, c' les hauteurs des points c, c' au-dessus de l'arête extérieure ou intérieure du joint de naissance; comme $\frac{m}{c}, \frac{m'}{c'}$ seront, pour ce joint, des forces analogues à f et f' , on aura nécessairement $\frac{m}{c} > f, \frac{m'}{c'} > f'$, à moins qu'il n'y ait égalité, ce qui arriverait si c'était le joint j ou j' lui-même qui fût celui de naissance. Mais si l'on a $F < f, F' < f'$ (N° 26), on aura, à plus forte raison, $F < \frac{m}{c}, F' < \frac{m'}{c'}$, c'est-à-dire, en appelant n le moment de la poussée, $m > n$.

De même, comme $\frac{m}{c}, \frac{m'}{c'}$ sont des forces analogues à F , F' , on aura $\frac{m}{c} < F, \frac{m'}{c'} < F'$ et, à plus forte raison $m' < cf, m' < c'f'$.

Mais puisque les réciproques ne sont pas vraies, il s'en suit que les conditions $m > LF, m' < Lf'$ sont insuffisantes. En outre, l'équilibre de la demi-voute sans pied-droit, qui est assuré par les conditions (N° 26) ne l'est nullement par l'équation $m = LF$ ou $m' = Lf'$, qu'on trouve par les nouvelles théories. De plus, ces théories établissent l'équilibre de la demi-voute, y compris le pied-droit, en égalant le moment du système, non pas au plus grand

moment de pression ni même au moment de la plus grande pression, mais seulement à celui de la pression engendrée soit à l'extrados soit à l'intrados de la clef, selon le cas de rupture, ce qui ne suffit pas non plus. Enfin, ces théorèmes ne montrant pas les raisons entre le premier cas de rupture et le second qu'ils considèrent isolément, sans en donner une explication satisfaisante. De ce que, dans ce second cas, la partie inférieure de la demi-voute, tourne autour de l'arête d'intrados de sa bête, on a conclu que cette partie inférieure l'emportant sur la partie supérieure, forçait celle-ci de se soulever à la clef, on tournant autour d'une arête d'extrados; mais cette rotation et le soulèvement de la clef sont un pur effet de la pression qui se produit à l'intrados de la clef et qui provient toujours de la tendance de la partie supérieure au joint J à tourner autour de l'arête d'intrados de ce joint; en conséquence de cet effet même, la partie inférieure cessant d'être retenue est entraînée par son propre poids et tourne autour de l'arête intérieure de sa bête. Ainsi la rotation et le soulèvement dont il s'agit ne sont pas dus à une prépondérance de cette partie sur l'autre, et c'est uniquement la partie supérieure au joint J , laquelle peut devenir toute la demi-voute, qui produit la pression effective et qui est la partie véritablement agissante. Le soulèvement de la clef n'est l'effet de la rotation autour de l'arête intérieure de la bête de la demi-voute, qu'autant que le joint J coïncide avec cette bête, ce qui ne constitue point un cas distinct et séparé, et ce soulèvement opérera, quelle que soit la position du joint, toutes les fois qu'abstraction faite du glissement, on aura... $\left(\frac{j}{J}, \frac{j'}{J'}\right)$ et $F' > F$, sauf le changement de F , quand le joint J tombe au-dessus de j .

IX. Après le N.º 43.

Vérifier si une voute proposée est capable de supporter une charge donnée.

1. Vérifier si une voute proposée est capable ou non de supporter une charge donnée.

Cette question est tout-à-fait analogue à la deuxième et se résout par les mêmes principes: il faudra examiner si les conditions de stabilité sont satisfaites, en observant que les valeurs des quantités G, g, F, f et F', f' ainsi que les positions des joints respectifs I, i, J, j et J', j' dépendent tant de la grandeur que de la distribution de la charge donnée et varient avec ces circonstances.

Exemples.

figure 24.

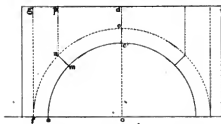
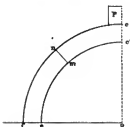


figure 25.



Quelques exemples feront concevoir la chose.

Lorsque la voûte est chargée d'une certaine épaisseur de matière, maçonnerie, terre, pavé etc., disposée de niveau et occupant toute son étendue, les poids de la partie supérieure $m n$ ce' et de la partie inférieure $m n f e$ sont augmentés de ceux des charges respectives $n p$ $d c$, $n p g f$, ce qui change les valeurs des limites soit relatives soit absolues, ainsi que les positions des points correspondants, et comme l'augmentation est à proportion plus grande pour la première partie que pour l'autre, la poussée de la voûte s'accroît nécessairement.

Si la charge au lieu de s'étendre à toute la longueur de la voûte, ne portait que sur le sommet, un de tel effet trait encore d'accroître la poussée, mais elle n'ajouterait rien à la résistance du pied-droit; Le poids de chacune des deux parties supérieures trait augmenté de la moitié du poids de la charge et le centre de gravité serait déplacé en conséquence de la grandeur et de la position de ce poids additionnel.

Le pluspart des voûtes et particulièrement les arches de pont sont chargées d'un massif de maçonnerie, qui n'excède guère le niveau de la clef; selon que la voûte sera peu ou fort surbaissée, ce massif portant en grande partie sur le pied-droit, augmentera la résistance dans un plus grand rapport que la poussée, ou, appuyant principalement sur la partie supérieure, comme quand la voûte est en arc de cercle, rendra la poussée plus grande sans ajouter beaucoup à la résistance du pied-droit; de sorte que, dans le premier cas, l'épaisseur du pied-droit n'aura pas besoin d'augmentation, mais au contraire pourra être diminuée, si le massif est construit avant le décaissement de la voûte, et, dans le second cas, cette épaisseur devra être augmentée convenablement.

Quand la charge additionnelle porte pleinement sur le pied-droit, elle ne peut évidemment qu'en augmenter la résistance, ce qui permet d'en diminuer l'épaisseur, parce que le décroissement du bras de levier est suppléé par l'accroissement du poids.

La charge portant partie sur le pied-droit partie sur la voûte, de manière que son centre de gravité tombe entre la maîtresse et le milieu de l'ouverture, pourra être alors grande pour que le premier mode de rupture se change dans



le second et alors la rupture sera impossible si la condition $F' < P'$ est satisfaite; sinon, il suffira de rendre la pression F' assez petite ou modifiant la charge convenablement.

Enfin si la voûte était chargée d'un fluide, il faudrait chercher à l'aide des principes de l'hydrostatique, la pression normale, exercée sur la partie supérieure au joint indéterminé $m n$ et composer le poids de cette partie avec la pression relative; on emploierait ensuite la résultante au lieu du simple poids pour déterminer les limites.

Par un semblable procédé, on pourrait avoir égard au choc des bombes, lequel, suivant la théorie physico-mathématique de la percussion, (Architectures hydraulique de Prony, 1^{re} partie, page 208) peut être évalué en poids. C'est à l'expérimentateur de fournir les éléments nécessaires à cette évaluation.

On voit par là qu'en général on pourrait établir l'équilibre dans une voûte où il n'existe pas, sans rien changer aux dimensions et seulement en augmentant par des charges additionnelles, convenables, le poids des parties qui tendent à tourner ou à glisser.

Une voûte étant donnée, déterminer la pression supportée par le cintre, en chaque point, aux divers époques de la construction.

2). Une voûte étant donnée, déterminer la pression supportée par son cintre, en chargeant, aux divers époques de la construction.

On conçoit qu'un certain nombre des premières attitudes d'une voûte ont la propriété de se soutenir d'elles-mêmes et que la suivante commence à presser le cintre, parce que son plan de joint inférieur se trouve incliné sous un angle plus grand que 37 à 38° qui est également celui du frottement des voutoirs placés sur cales ou pots à sec les uns sur les autres.

Ainsi, à partir de cette inclinaison, chaque voutoir successif pressera le cintre, jusqu'à celui dont le joint inférieur aura une inclinaison telle que la rotation autour de l'arête d'intrados soit devenue possible, c'est-à-dire, telle que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité passe en dehors de ce joint. La position de ce dernier voutoir dépendra tant du rapport entre la longueur et la largeur des voutoirs que de la courbure de la voûte, et il pourra arriver que l'élément respectif du cintre fasse avec l'horizon un angle plus petit ou plus grand que 38° ; dans le premier cas, le voutoir et chacun des suivants chargeront le cintre de tout leur poids; dans le second cas le voutoir

et ceux qui succéderont; jusqu'à ce que l'inclinaison ait atteint 38° presseront les inférieurs et pèseront sur le cintre.

Généralement, la pression due à un vouvoiement quelconque s'obtiendra par les formules de l'équilibre d'un corps pesant, posé sur un ou sur deux plans inclinés et sujet à la résistance du frottement. Ces formules s'appliqueront directement au dernier vouvoiement posé. Pour le vouvoiement qui vient après, il devra être considéré comme soumis non seulement à la pesanteur, mais encore, s'il y a lieu, à la pression qui s'exerce sur son joint supérieur.

Les formules feront connaître la pression supportée soit par le cintre, soit par le joint inférieur, au moyen de quoi on passera au troisième vouvoiement et ainsi de proche en proche, jusqu'au dernier qui puisse presser le cintre.

Un phénomène qu'on observe souvent dans le progrès de la construction, c'est que, les vouvoiements supérieurs poussant les inférieurs obliquent la portion de voûte que forment ceux-ci à se soulever vers son milieu on s'ouvrant à l'extrados, de manière que la partie contiguë du cintre se trouve dégagée; aussi le calcul donnerait-il une valeur négative pour la pression exercée sur le cintre par chacun de ces derniers vouvoiements.

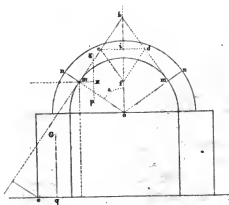
X. Sur les N.^{os} 46, 47 et 48.

figure 26.

1.^o Désignons par α l'angle que le joint de rupture, dans l'hypothèse de Lahire, fait avec la verticale; par m, n les

distances horizontale et verticale de son intrados à l'arête extérieure de la base du pied-droit; par p le poids de la demi-partie supérieure de la voûte, par x la distance horizontale du centre de gravité de cette demi-partie à l'intrados du joint de rupture; par q le poids de la partie inférieure et du pied-droit; enfin par x' la distance horizontale de leur centre de gravité à l'arête extérieure.

On décomposera le poids $x p$ en deux forces $\frac{P}{\sin \alpha}$ perpendiculaires aux joints de rupture et dirigées à leurs intrados;



le moment de la force $\frac{P}{\sin a}$, appliquée on m , par rapport à l'axe extérieure e , sera égal à la différence des moments de ses composantes horizontale et verticale; écrivant donc $m+x-x$, au lieu de m , et, représentant par M le moment total $p(m+x)+qX$, on trouvera cette équation d'équilibre,

$$M = px + \frac{np}{\tan a} \dots \dots \dots (H)$$

tandis que selon notre théorie, on a

$$M = FL \dots \dots \dots (n)$$

F étant le maximum de $\frac{px}{y}$.

Voûtes intérieures à extrados horizontal;

2°. Appliquons ces équations d'abord au plein cintre à extrados horizontal; pour cela, nous remarquerons que Lahire suppose le joint de rupture prolongé jusqu'à cet extrados; de sorte qu'avec $a = 45^\circ$, et $n = h + r \cos a$, il a

$$p = \frac{1}{2} R^2 \tan a - \frac{1}{2} r^2 a; \quad px = \frac{1}{2} r^3 \sin^2 a \left[\frac{K^2}{\cos a} \left(1 - \frac{K}{\sin a} \right) + \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} a} - \frac{a}{\sin a} \right]$$

Le tableau suivant présente les résultats relatifs à différentes hypothèses.

Hypothèses	Résultats de l'équation		Rapports des deux sortes de résultats
	(H)	(n)	
$r=6; R=7; h=2$	72, 5732	39, 9582	1, 8162
" " $h=4$	93, 3042	48, 8378	1, 9104
$r=10; R=11; h=2$	237, 4942	133, 6107	1, 7026
" " $h=4$	269, 9542	154, 1663	1, 7510

On voit que la méthode de Lahire donne un moment de stabilité, pour la même voûte, d'autant plus grand que les pieds-droits sont plus élevés et pour la même hauteur de pieds-droits, d'autant moindre que la voûte est plus grande.

Voûtes intérieures, à extrados horizontal;

3°. Considérant ensuite l'arche de panier à trois centres et pour ce genre de voûte, modifiant la règle de Lahire, à la manière des Ingénieurs qui placent le joint de rupture au point de raccordement des arcs du sommet et de la naissance, on a pour la voûte surbaissée au tiers et extradosée horizontalement, les résultats suivants, relatifs à différentes hypothèses

Cable.

Hypothèse, ω .	Résultats de l'équation		Rapports des deux vues de résultats.
	(H)	(N)	
$a=6''; c=1''; h=2$	72, 4859	40, 1933	1, 8034
" " $h=4$	98, 4655	51, 6771	1, 8972
$a=10; c=1; h=2$	200, 6315	126, 5250	1, 5857
" " $h=2$	250, 3968	152, 7016	1, 6397

Même conclusion que précédemment et celle autre que le moment de stabilité produit par la méthode de Lahire est moindre pour la voûte surbaissée que pour le plein cintre et d'autant moindre que la voûte a plus d'ouverture, d'autant qui ont été plus sensible, sans la modification apportée à la méthode.

Valeurs du coefficient de stabilité pour toutes les voûtes au plein cintre et pour les voûtes surbaissées au quart et extradosées horizontalement.

4). Afin de corriger ces irrégularités, nous avons attribué à toutes les voûtes au plein cintre ou surbaissées au tiers et extradosées horizontalement, le même moment de stabilité et nous avons adopté le rapport 1,9 provenant des voûtes de moyenne grandeur; on sorte que la valeur de la poutée, tirée de nos formules, doit être multipliée par ce nombre avant d'être introduite dans l'équation d'équilibre.

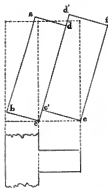
Le même coefficient 1,9 paraît convenir aussi pour les voûtes surbaissées au quart et extradosées de niveau.

Plein cintre extradosé au chape; magasins à poudre; Châssis des contre-forts; valeur du coefficient de stabilité.

5). Enfin on a déterminé le moment de stabilité des pleins cintres extradosés au chape, on les comparant aux magasins à poudre de Vauban. Cet Ingénieur donne à ses magasins, pour une ouverture de 25^{pi}, des pieds-droits de 8^{pi} d'épaisseur sous 8 de hauteur; il les fortifie par des contre-forts espacés de 12^{pi}, ayant aussi 8^{pi} de hauteur, 6 de largeur et seulement 4 de quene; il élève le sommet extérieur de la chape à 8^{pi} au-dessus de l'intrados, et parce que l'épaisseur aux reins est de 3^{pi} il en résulte $B=20''\frac{1}{2}$, $I=49''\frac{7}{17}$.

Soit donc $C=2''\frac{5987}{1000}$; le premier membre de notre équation d'équilibre $M=FL$, donnera $M=49,7886$ pour le moment de la résistance de la demi-chape et du pied-droit sans contre-forts. Maintenant comme le frottement empêche le glissement sur la fondation, il s'ensuit que le pied-droit ne pourra céder que par un mouvement de rotation et en entraînant les contre-forts dont il se séparera (fig. 27) selon son parement extérieur, ou bien sans entraîner les contre-forts dont il se séparera alors latéralement (fig. 28).

figure 27.



Dans le premier mode de rupture, la résistance des contre-forts proviendra de quatre forces; la cohésion sur la ligne ce , la cohésion sur la ligne cd , le frottement au point d de la même ligne, le poids du contre-fort tournant autour du point e . On néglige la cohésion sur bc laquelle serait fonction de c .

Soient a la longueur totale du magasin, n le nombre des contre-forts; h, l, q leur hauteur, leur longueur et leur queue; γ la cohésion sur l'unité de surface de maçonnerie, δ le poids de l'unité de volume; les moments des quatre forces par rapport à e seront, pour un seul contre-fort, $\frac{1}{2} l q^2 \gamma, h l q \gamma, \frac{1}{2} l q^3 \delta \tan \theta, \frac{1}{2} h l q^2 \delta$; la somme multipliée par n et ajoutée à $a \delta M$, sera le moment total du pied-droit et des contre-forts. Si l'on divise le résultat par a , afin de le rapporter à l'unité de longueur et par δ , afin de le rendre comparable à la valeur de M , déjà calculée, il viendra

$$M + \frac{l n q}{2 a} \left[(q + 2h) \frac{\gamma}{\delta} + q (q \tan \theta + h) \right] \dots (1)$$

Or, on a, pour le magasin de Vauban, $M = 43,7484$; $h = 2^m, 5987$; $l = 1,9430$; $q = 1,2934$; $n = 4$; $a = 19,49$ et si l'on prend $\delta = 300 \text{ K}^3$; $\gamma = 6000 \text{ K}^3$, $\tan \theta = 0,76$, la valeur de l'expression (1) sera $56,013$; mais suivant notre théorie le moment FL de la poutre est $28,1632$; on a donc le rapport $1,9884$; de sorte que l'épaisseur du pied-droit simple de même stabilité que celui de Vauban avec contre-fort serait 3^m environ.

En effet pour le magasin de Vauban $h = 2^m, 5987$; $L = 7^m, 6537$; $r = 4,0605$; $\frac{R}{T} = K = 1,24$ et $B \sin I = R$; formules (F), (I), (n) du N^o 58, deviennent donc

$$\frac{r^2 \sin^2 \lambda}{6(K - \cos \lambda)} \left\{ \frac{K^2}{\sin I \sin(I + \lambda)} \left[3 - \frac{K}{\sin(I + \lambda)} \right] - \left[3 \frac{\lambda}{\sin \lambda} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} \right] \right\} \dots (F)$$

$$\frac{r^2 \sin^2 \lambda}{6K(1 - \cos \lambda)} \left\{ \frac{K^3}{\sin I \sin(I + \lambda)} \left[3 - \frac{1}{\sin(I + \lambda)} \right] - \left[3K \frac{\lambda}{\sin \lambda} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} \right] \right\} \dots (I)$$

$$\frac{1}{2} h \varepsilon^2 + r^2 \left(\frac{K^2}{\sin 2I} - \frac{1}{4} \pi \right) \varepsilon + r^3 \left[\frac{K^2}{\sin 2I} \left(1 - \frac{K}{3 \cos I} \right) - \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{3} \right) \right] = n FL \dots (n)$$

les éléments du calcul sont

$$Lr = 0,6085795. \quad LK = 0,0934217. \quad L \frac{r^2}{\varepsilon} = 0,4390077. \quad L^2 = 0,4771213.$$

$$Lr^2 = 1,217590. \quad LK^2 = 0,1868434. \quad L \frac{r^2 K^2}{\sin I} = 0,3082654. \quad L \frac{K}{\sin I} = 7,8004182.$$

$$Lr^3 = 1,8157385. \quad LK^3 = 0,2807651. \quad L \frac{r^2 K^3}{\sin I} = 0,4016871. \quad L \frac{K^2}{\sin 2I} = 0,1913532.$$

$$Lh = 0,4147561. \quad LL = 0,8827351.$$

et l'on trouve

par la formule (F),	par la formule (I),
pour $\alpha = 45^\circ \dots X = 3,6645$	pour $\alpha = 90^\circ \dots X = 4,0519 = f;$
46 3,6901	60 6,7050
47 3,7122	80 5,1815
50 3,7590	81 5,0881
60 3,7264	82 4,9936
55 3,7766	83 4,8982
54 3,7790 = F; $L = 2,5773762$	85 4,6863
53 3,7783	89 4,1961.

On conclut de là $FL = 14,8477$; $n = 1,947$ et alors la formule (n), est-à-dire, $E = 9,74845$. $E = 2 \left(\frac{1,947 \cdot FL - 8,05748}{h} \right)$, donne $E = 2,915$.

Dans le second mode de rupture, si l'on suppose la cohésion sur la section $abcd$ du pied-droit, réunie au centre de figure de cette section, son moment par rapport à c sera... $\frac{1}{2} h \varepsilon \gamma \sqrt{h^2 + \varepsilon^2}$. En divisant le double de ce moment par δ et par la longueur a du pied-droit, comprise entre deux contre-forts et ajoutant au résultat la quantité M , on aura pour le moment total de la résistance sur l'unité de longueur, l'expression

$$M + \frac{h \varepsilon \gamma}{a \delta} \sqrt{h^2 + \varepsilon^2} \dots (2)$$

qui appliquée au magasin de Vauban donne une valeur plus grande que la précédente, quoiqu'on ait supposé la cohésion réunie au centre de gravité de la section; c'était donc par la première expression que devrait être évaluée la résistance du pied-droit et des contre-forts.

La question est susceptible d'une solution plus exacte: il est clair que les forces élémentaires de la cohésion sont dirigées dans le plan de rupture; or, pour le premier mode de rupture, ce plan est parallèle à l'axe de rotation; par conséquent le bras de levier des forces est constant et égal à la longueur de queue du contre-fort; mais pour le second mode, le plan de même que les forces sont perpendiculaires à l'axe de rotation et il faudrait à la rigueur prendre la somme des moments des forces; ce qui conduirait à l'intégrale double

$$\iint dx dy \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Considérons d'abord la variable y et mettons à part le facteur constant γdx , nous aurons $\int dy \sqrt{x^2 + y^2}$ qui intégrée par

partiel donnera $y\sqrt{x^2+y^2} - \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; pour avoir cette dernière

intégrale posons $\sqrt{x^2+y^2} = z - y$; nous trouverons

$$\frac{1}{3} \left[\frac{(z^2+x^2)(z^2-x^2)}{z^2} \right] - \frac{1}{2} x^2 z = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2} x^3 l(y+\sqrt{x^2+y^2});$$

Ainsi, après l'intégration par rapport à y et entre les limites $y=0$, $y=h$, on a

$$\frac{1}{2} y \left[h \int dx \sqrt{h^2+x^2} + \int x^2 dx \, l \frac{h+\sqrt{h^2+x^2}}{x} \right].$$

Le premier de ces termes produira semblablement, . . .

$\frac{1}{2} h x \sqrt{h^2+x^2} + \frac{1}{2} h^3 l(x+\sqrt{h^2+x^2})$; on intégrant le second, par parties on obtiendra $\frac{1}{3} x^3 l \frac{h+\sqrt{h^2+x^2}}{x} - \int \frac{1}{3} x^2 dl \frac{h+\sqrt{h^2+x^2}}{x}$; or,

l'intégrale indiquée revient à celle-ci $+\frac{1}{3} h \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{h^2+x^2}}$ déjà traitée et

donne $\frac{1}{6} h x \sqrt{h^2+x^2} - \frac{1}{6} h^3 l(x+\sqrt{h^2+x^2})$; donc parce que x a pour limites 0 et ε , l'intégrale définie multipliée par 2 et divisée par $a^2 d$ sera

$$\frac{1}{3} \frac{y}{a^2 d} \left[2 h \varepsilon \sqrt{h^2+\varepsilon^2} + h^3 l \frac{\varepsilon+\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}{h} + \varepsilon^3 l \frac{h+\sqrt{h^2+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right]$$

la caractéristique l désignant un logarithme népérien. En appliquant aux magasins de Nauban cette formule et la formule approximative que nous lui avons substituée, on trouve respectivement 20,6700; 19,1008; tandis que par rapport au premier mode de rupture, on a seulement 6,2646.

Comparaison du pied-droit simple, avec le pied-droit muni de contre-forts.

6°. Il est remarquable que l'excès d'épaisseur du pied-droit simple de même stabilité que le pied-droit muni de contre-forts, n'étant que de 1", ce qui produit sur les 60" de longueur du magasin 480 pieds cubés de maçonnerie, tandis que le volume des quatre contre-forts est de 768 pieds cubés, il y aurait une économie réelle à supprimer les contre-forts.

Détermination de l'épaisseur d'un pied-droit muni de contre-forts

7°. Au moyen des expressions (1) et (2) on résout cette question: connaissant l'épacement et les dimensions des contre-forts qu'on se propose d'ajouter à un mur, déterminer l'épaisseur que ce mur doit avoir pour résister, conjointement avec les contre-forts, à la poussée qui agit contre lui.

Soient toujours F la poussée horizontale et L son bras de levier: on peut regarder cette poussée comme composée de deux parties, l'une C opposée à la résistance des contre-forts, l'autre $F-C$ opposée à la résistance du mur. Or, si m et M représentent

les moments de ces résistances, on aura $C = \frac{M}{L}$, $F - C = \frac{M}{L}$ et par conséquent

$$M + m = FL \dots (3)$$

équation dont le premier membre n'est autre chose que l'expression (1) ou (2) et qui donnera la valeur cherchée, soit que les contre-foirs se renversent soit qu'ils demeurent immobiles; dans l'un de ces cas m sera donné immédiatement, dans l'autre il sera fonction de l'épaisseur demandée.

On a coefficient de stabilité pour les autres genres de voûtes.

8°. Quant aux voûtes des autres genres on en déterminerait le coefficient de stabilité par le même procédé; mais comme la plupart n'ont qu'une stabilité factice, obtenue par des artifices particulières, il est difficile d'en trouver qui puissent servir de termes de comparaison (*).

XI. Sur le N.º 53.

La condition du maximum de la fonction (C) est indépendamment de R et δ , $\sin 2(\alpha + \varphi) = 2\delta$, équation qui rend négatif le coefficient différentiel du second ordre, et qui, si l'on fait $\tan \varphi = 0,76$ ou $\varphi = 37^\circ$, prendra la forme $\sin(106^\circ - 2\delta) = 2\delta$; or, en se rappelant que dans le second membre δ doit être exprimé en parties du rayon et que l'arc égal au rayon est à peu près 57° , on verra d'abord que δ tombe entre 8° et 29° , mais plus près de 29° ; ensuite, par les fautes positions, on trouvera sans peine $\delta = 24^\circ$.

La fonction (G) donne pareillement l'équation $\sin(\alpha - \varphi) = 2\delta$, à laquelle répondrait aussi un maximum, puisqu'elle rend négatif le coefficient différentiel du second ordre; mais cette équation est absurde; car d'une part, 2δ ne peut excéder 58° ; d'autre part, un arc surpasse toujours son sinus et, à plus forte raison, le sinus d'un arc moindre que lui, s'il s'agit du premier quart de la circonférence. La quantité $\frac{\delta}{\tan(\alpha - \varphi)}$ n'est donc susceptible ni de maximum ni de minimum absolu, et comme sa valeur qui est $\frac{1}{2} \text{ ou } \tan \varphi$, quand $\delta = \frac{\pi}{2}$, augmente à mesure que δ diminue et devient infinie, lorsque $\delta = \varphi$, et négative au-delà; il s'en suit que cette valeur on est le minimum relatif ou que le joint se confond avec celui de naissance, ce que nous avons précédemment établi en général.

Avant d'aller plus loin nous remarquerons qu'en

(*) Cette observation, à quelques changements près, est extraite du *Mémoire* (N.º 4, page 75 et suivantes).

égalant à zéro, une des fonctions (F) et (F') au lieu des deux (F) et (F'), on exprime que $g'g'=m'm'$ ou $n'n'$, c'est-à-dire que la verticale menée par le centre de gravité de p, passe par le point m ou n.

Le dénominateur de la fonction (F) ne sort pas des limites $6R$ et $6(R^2-r^2)$; son numérateur qui peut se mettre sous la forme $2\left[3r(R^2-r^2)\frac{\lambda}{\tan\frac{\lambda}{2}}-2(R^3-r^3)\right]\sin^2\frac{\lambda}{2}$, s'annule non seulement quand $\lambda=0$, mais encore lorsque $\frac{\lambda}{\tan\frac{\lambda}{2}}=\frac{2(R^3-r^3)}{3r(R^2-r^2)}=\frac{2(R^2+Rr+r^2)}{3r(R+r)}$, valeur comprise entre 1 et 1,555; puisqu'on peut admettre sans contredit que R qui surpasse toujours r soit moindre que $2r$. Or, la quantité $\frac{\lambda}{\tan\frac{\lambda}{2}}$, qui devient $\frac{\pi}{2}$ ou 1,5708 on même tens que λ , prend la valeur 2, pour $\lambda=0$; et comme à mesure que λ croît depuis zéro, elle diminue, jusqu'à devenir nulle pour $\lambda=\pi$; il en résulte que des deux valeurs de λ qui réduisent la fonction (F) à zéro, la seconde surpasse $\frac{\pi}{2}$; que cette fonction reste toujours positive depuis l'une de ces valeurs jusqu'à l'autre, et, par conséquent que dans l'intervalle elle comporte un maximum, lequel dépendra du rapport $\frac{R}{r}$.

Les fonctions (F) et (F') suivent la même marche que la quantité $\frac{\lambda}{\tan\frac{\lambda}{2}}$ qu'elles renferment; or, cette quantité n'est susceptible ni de maximum ni de minimum absolu; sa valeur augmente depuis $\lambda=\frac{\pi}{2}$, d'où résulte le minimum relatif $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à $\lambda=0$, qui donne le maximum relatif 2. La valeur de X , qui répond à ce maximum est en effet une limite de laquelle les valeurs de X approchent de plus en plus à mesure que λ diminue.

Enfin, le numérateur de la fonction (F') est nul quand $\lambda=0$, et, on sortant du quart de cercle, quand $\frac{\lambda}{\tan\frac{\lambda}{2}}=\frac{2(R^2+r+r^2)}{3R(R+r)}$, quantité comprise entre 0,7777 et 1, et il demeure positif depuis l'une de ces valeurs de λ jusqu'à l'autre; mais le dénominateur est nul pour cet $\lambda=\frac{r}{R}$, valeur donc les 0 limites tend $\frac{1}{2}$ et 1, et qui signifie que le point n est sur l'horizontale passant par le point c; il est positif ou négatif pour les valeurs de cet λ plus petites ou plus grandes que celle-là. Ordonné la fonction est négative entre $\lambda=0$ et cet $\lambda=\frac{r}{R}$, terme où elle devient infinie; à partir de ce terme elle est positive

et tend vers zéro; elle n'est donc pas susceptible de minimum absolu, et son minimum relatif répond à $\lambda = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que quand le point d'application de la force X est placé en c' , le joint j' ne se trouve pas au-dessus du joint J' ; de sorte que si, par rapport à ce dernier joint, on avait $\cos \lambda < \frac{F}{R}$, on devrait le prendre pour le joint j' et la force capable de faire tourner autour de son extrémité, pour la force F' ; mais on vient de voir qu'on a $\lambda = 0$ ou $\cos \lambda = 1$ et par conséquent $\cos \lambda > \frac{F}{R}$; ainsi, dans ce cas, les formules (F') et (F) doivent être rejetées.

XII. Sur le N. 34.

Exemples: 1°. Soit $R = 11^m$; $r = 10^m$; $h = 2^m$, on trouvera d'abord $G = 3,7442$; $g = 19,0868$. Ensuite, la première équation (F) reviendra à

$$0,1613 = 1,15 \left(1 + \frac{h}{\sin \lambda} \cos \lambda \right) - \left(\cos \lambda + \frac{h}{\sin \lambda} \right),$$

et si l'on considère les valeurs extrêmes $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, puis la valeur moyenne $\lambda = \frac{\pi}{2}$, on apercevra dans quelle moitié du quadrant tombe la vraie valeur de λ ; alors il suffira de deux suppositions pour trouver cette valeur à moins de $\frac{1}{2}$ degré près: on parvient ainsi à $\lambda = 57^\circ$, valeur dont la substitution dans la seconde équation (F), donne $F = 9,1801$, et par la formule (F) qui implique $\lambda = \frac{\pi}{2}$ (Note XI), on aura $f = 10,3483$, ce qui montre que les conditions $\left(\frac{F}{J}, \frac{F'}{J'} \right)$, $F < f$ sont satisfaites. Résolvant donc l'équation (n), on en tirera $\varepsilon = 1,6414$. Lorsque dans le premier membre de cette équation (n) on fait $h = 0$ et qu'on y remplace ε par $R - r$, il se réduit à $\frac{1}{2} \pi R(R^2 - r^2) - \frac{2}{3}(R^3 - r^3) = 117,6595$ et exprime le moment de la demi-voute, tant pied-droit, par rapport à l'arête extérieure de son joint de naissance; le second membre qui devient $FR = 105,5710$, dans l'hypothèse de $h = 0$, est alors le moment de la poutre par rapport à la même arête; d'où résulte $M > FR$, comme cela devait être; car, en général, la voute se soutenant d'elle-même sur les joints j, j' , se soutiendra, à plus forte raison, sur deux joints quelconques correspondants et, dans le cas actuel, ces joints j, j' , se confondent avec ceux de naissance.

Il en est autrement pour $R = 11^m$; alors la première équation (F) donne $\lambda = 53^\circ$ environ et l'on trouve $G = 1,4381$; $g = 12,4277$; $F = 6,7858$; $f = 6,4631$; d'où $\left(\frac{F}{J}, \frac{F'}{J'} \right)$ et $F > f$; ainsi la voute ne

ne pourrait le soutenir d'elle-même. En effet, si l'on calcule FR et M on a également 7,2941, tandis que $PL=FR=76,6438$; d'où $M < FR$. On conclut de là que la moindre épaisseur de la voûte qui suffise à l'équilibre est comprise entre 1^{re} et 1^{re} 5.

Supposons encore $R-r = \frac{r}{5}$ ou $\frac{R}{r} = \frac{6}{5}$; la première équation (F) donnera $\delta = 55^{\circ} 23'$; c'est-à-dire que quand l'équilibre est $\frac{1}{16}$ de l'ouverture de la voûte, le joint J, fait un angle de $55^{\circ} 23'$ avec la verticale. En substituant cette valeur de δ dans la seconde équation (F), on en déduit $F = 5,1515(\frac{r}{5})^2$.

XIII. Sur le n.º 56.

1.º Il y a quelques remarques à faire sur ces formules: 1.º la première (G) et les deux des systèmes (F) et (F') donnent $X=0$ pour $\delta=0$, la dernière donnant en outre X infini pour $1-K \cos \delta=0$, ou $\cos \delta = \frac{1}{K}$; 2.º les équations des systèmes (F) et (F') sont généralement satisfaites par $\delta=0$; 3.º (et cela s'applique aux formules du cas précédent) les valeurs de δ auxquelles répondent les maximum et minimum ne dépendent que du rapport K ; il n'en est pas de même des valeurs des limites F, f, F', f' ; mais ces valeurs ont r^2 pour facteur; donc si les voûtes sont semblables les joints relatifs aux limites sont semblablement placés et les valeurs des limites sont proportionnelles aux carrés des rayons des voûtes; 4.º nous n'avons point cherché la condition du maximum de l'expansion (G), qui est susceptible d'une opération plus simple, indiquée précédemment; si par exemple, $\varphi = 37^{\circ}$, il est clair que la valeur de δ à laquelle répondra le maximum de X sera comprise entre $\delta=0$ et... $\delta = 90^{\circ} - 37^{\circ} = 53^{\circ}$; de sorte que la considération de ces valeurs extrêmes et de quelques valeurs intermédiaires fera bientôt découvrir ce maximum et la valeur respective de δ .

2.º Exemples: soit $\varphi = 37^{\circ}$, $r = 10$, $R = 11$; la formule (G) devient

$$X = \frac{100 \sin \delta}{2 \tan(\delta + 37^{\circ})} \left[2,42 - 1,31 \cos \delta - \frac{\delta}{\sin \delta} \right]; \text{ or, } \delta \text{ est compris entre}$$

0 et 53, valeurs à chacune desquelles répond $X=0$; on considère donc d'abord la valeur moyenne 26, dont on déduira $X=3,32037$; ensuite la valeur 25, à laquelle répondra:

$X=3,16862$; on conclura de là que la vraie valeur de δ tombe entre 26 et 53; on obtiendra 40, d'où résultera $X=3,0268$; puis 30; 31; 32; 33, qui donneront $X=3,4678$; $X=3,3518$; $X=3,4573$;

$X=3,4463$ et montreront que les valeurs cherchées sont $G=3,4572$
 $\delta=32$.

Par un semblable procédé on trouve que $\delta=65^\circ$ satisfait à l'équation de condition (F); cette valeur de δ se rapporte à un maximum de X , puisque, pour $\delta=64$, $\delta=65$, $\delta=66$, la formule (F) donne $X=10,271486$; $X=10,277512$; $X=10,277006$ et comme X diminue continuellement pour les valeurs de δ , plus grandes ou plus petites que celle-là, il s'ensuit qu'on a à peu près $F=10,2773$; $\delta=65^\circ$.

L'équation (E) est satisfaite par $\delta=62$, $\delta=0$; valeurs qui correspondent respectivement à un maximum et à un minimum; on obtient, pour $\delta=61$; $\delta=62$; $\delta=63$ la formule (E) donne $X=15,2462$; $X=15,2474$; $X=15,2418$; mais au-delà et en deçà de ce maximum, X décroît continuellement jusqu'à $X=12,2630$, résultant de $\delta=90^\circ$, et $X=10,9697$ donné par $\delta=0$; de plus une même valeur soit positive soit négative de δ donne la même valeur de X ; il n'existe donc qu'un minimum absolu et l'on a $E=10,9697$; $\delta=0$.

La racine de l'équation (F') est $\delta=56$ et si l'on fait $\delta=0$, $\delta=55$, $\delta=56$, $\delta=57$, $\delta=90$, dans la formule (F') on en tire $X=9,9667$; $X=12,2522$; $X=12,2548$; $X=12,2534$; $X=9,2435$. Cette racine appartient donc réellement à un maximum et il s'en suit $F'=12,2568$; $\delta=56$.

Enfin l'équation (E') étant mise en nombres, le second membre devient $5,5613$; mais la plus grande valeur que prenne le premier membre est $6,4983$ qui résulte de $\delta=49$; il n'existe par conséquent ni maximum ni minimum absolu. Effectivement, la formule (E') donne d'abord X infini pour $\delta=26^\circ 37' 2''$; ensuite X de plus en plus petit à mesure que δ approche de 90° , valeur pour laquelle $X=13,4894$; à la vérité il vient $X=0$, quand $\delta=0$; mais cette valeur de X appartient à la série des valeurs négatives et étrangère à la question. Or il n'existe qu'un minimum relatif $E'=13,4894$, provenant de $\delta=90$.

On voit donc que la condition $(\frac{F}{f}, \frac{F'}{f'})$, outre les relations $F < f$, $F' < f'$ qui sont indifférentes est remplie et qu'à abstraction faite du glissement sur les joints de naissance, la vérité se trouverait d'elle-même; mais que le moment de la force F' par rapport au plan des naissances (ce qui pourrait n'avoir pas lieu par rapport à un plan inférieur) surpasse celui de la force F , c'est la première qui doit être substituée au lieu de F

dans l'équation (x). Faisant cette substitution et prenant $h=0$, $L=10$, on trouve $e=0^m,6972$. S'il fallait que la route fût élevée sur des piédestaux de 10^m de hauteur, on aurait $h=10$, $L=10$, le reste demeurant le même dans cette équation dont on tirerait $e=2^m,5343$.

Soient toujours $\varphi=37$, $h=0$, $r=10$ et prenons successivement $R=10^m,5$; $R=10^m,25$ ou, en appelant e l'épaisseur à la clef, $e=0^m,5$; $e=0^m,3$; $e=0,25$; nous obtiendrons les résultats classés avec les premiers, dans le tableau ci-joint, selon les formules (G), (F), (f), (F'), (f') et les épaisseurs $0^m,5$; $0^m,3$; $0^m,25$ auxquelles ils se rapportent.

Tableau des Résultats obtenus .

Formules	$e=1^m$		$e=0,5$		$e=0,3$		$e=0,25$	
	Δ	X	Δ	X	Δ	X	Δ	X
(G)	0°	0	0	0	0	0	0	0
	31	3,3518	33	2,2085	34	1,7433	35	1,6365
	32	3,4572	34	2,2123	35	1,7495	36	1,6382
	33	3,4463	35	2,2075	36	1,7481	37	1,6380
	53	0	53	0	53	0	53	0
(F)	0	0	0	0	0	0	0	0
	64	10,2749	67	8,1707	69	7,1874	69	6,9245
	65	10,2775	68	8,1737	69	7,1885	70	6,9295
	66	10,2702	69	8,1703	70	7,1878	71	6,9267
	90	3,4035	90	6,2227	90	6,0655	90	5,8652
(f)	0	10,9697	0	5,2460	0	3,2092	0	2,5621
	61	15,2462	63	10,0837	68	8,1966	68	7,7365
	62	15,2476	66	10,0889	69	8,1981	69	7,7415
	63	15,2418	67	10,0887	70	8,1934	70	7,7410
	90	12,2630	90	8,2515	90	6,8680	90	6,5120
(F')	0	9,9667	0	4,9958	0	2,9942	0	2,4929
	55	12,2532	64	8,2520	67	7,5817	68	7,1951
	56	12,2548	65	8,2537	68	7,5863	69	7,1968
	57	12,2534	66	8,2503	69	7,4999	70	7,1929
	90	9,2435	90	7,1623	90	6,2472	90	6,0066
(f')	0	-0	0	-0	0	-0	0	-0
	103°1'	∞	1°45'	∞	1°54'	∞	1°45'	∞
	40	22,8317	38	10,4633	37	6,4638	26	5,4292
	55	19,1940	39	10,4595	28	6,4500	25	5,4077
	68	17,6765	40	10,4649	29	6,4546	26	5,4078
	90	13,4894	90	8,2676	90	7,0737	90	6,6745

Ces calculs s'abrégent beaucoup au moyen de la table des valeurs de la fonction $\frac{a}{\sin \alpha}$ et de leurs logarithmes.

Il est remarquable que la formule (F') qui n'a donné ni maximum ni minimum absolu, pour $e=1$, compare au contraire l'un et l'autre, pour les trois dernières valeurs de e ; nous n'avons indiqué dans le tableau que le minimum.

En ne considérant que les valeurs définitivement nécessaires, et en employant pour les angles une notation analogue à celle des forces, nous aurons ce tableau sommaire.

Tableau Des Valeurs Finales.

e	G	B	F	A	f	a	F'	A'	f'	a'
1 ^m	3,4572	32	10,3775	65	10,9637	0°	12,2568	56	13,6894	90°
0,5	2,2123	34	8,1737	68	5,2460	0	8,8537	65	8,7476	90
0,3	1,7495	35	7,1885	69½	3,0492	0	7,5263	68	6,4500	88
0,15	1,6382	36	6,9295	70	2,5621	0	7,1968	69	5,4977	85

qui fait voir, d'une part, la marche de chaque force et de l'angle respectif, en conséquence de la diminution d'épaisseur; d'autre part, les changements apportés par cette diminution, soit dans la relation de grandeur des forces, soit dans la relation de position des joints correspondants: 1° le joint j reste confondu avec le joint vertical de la clef, du moins pour les épaisseurs supposées et, ce qui est bien remarquable, le joint J' s'abaisse de plus en plus, on s'approchant de la naissance, tandis que le joint j' d'abord placé à la naissance et au-dessous du joint J' se relève et passe au-dessus, on s'approchant de plus en plus du sommet de la voûte; 2° sous l'épaisseur 0,5 la voûte est encore dans le cas de stabilité ($\frac{J}{J'}, \frac{j}{j'}$), si ce n'est qu'ici les forces ont entre-elles les relations $F > F', F' > F'$, qui sont indifférentes; 3° sous les épaisseurs 0,3 et 0,15 la voûte est dans le cas de rupture ($\frac{J}{J'}, \frac{j}{j'}$), $F > F'$, qui appartient au second mode.

On conclut de là que la moindre épaisseur à la clef est comprise entre 0,5 et 0,3. Quant à la limite supérieure, si toutefois ce genre de voûte en comportait une, on la déterminerait semblablement en attribuant à e des valeurs de plus en plus grandes que 1^m.

Le développement de ce cas qui est un des plus utiles

nous a fourni l'occasion d'expliquer la manière d'employer les formules, et la distribution des différents exemples a eu pour objet de confirmer notre théorie et d'en faire bien saisir l'esprit.

Selon les nouvelles théories dont nous avons fait mention et dans lesquelles on ne tient pas compte des diverses dispositions des joints et on ne considère que la force F ou la force F' , tant les comparer respectivement aux deux F, F' , on trouve que pour l'épaisseur de 0^m,3 la voûte se tiendrait d'elle-même, résultat qui manifeste bien la defectuosité de ces théories. (voyez N^o 4 du Memorial, pages 32 et 34).

XIV. Sur le N^o 58.

1^o Exemple: Communément on donne aux pans de la chape une inclinaison de 45°; alors, on prenant $r = 5^m$, $R = 6^m$ et en supposant la droite dl tangente au cercle cd , d'où résulte $B = R\sqrt{2} = 8,4858$, on trouve par la formule (F)

$$\text{pour } \lambda = 45^\circ \dots X = 9,3176,$$

$$\lambda = 46 \dots X = 9,3546 = F$$

$$\lambda = 47 \dots X = 9,3671,$$

$$\lambda = 48 \dots X = 9,3809;$$

Soit de plus $h = 2^m$ et substituons ces valeurs dans l'équation (m) nous en déduisons $E = 2^m,778$ (*).

2^o Nous avons trouvé $F = 3,7790$ et $F' = 4,0519$; d'où résulte

$$F - F' = 0,2729 \dots (c)$$

On a prolongé (N^o 58) le joint $m n$ jusqu'au pan dl de la chape; si on suppose qu'il se replie suivant la verticale nx , alors la partie supérieure $m n x d c'$ équivaudra au rectangle $n n' x' x$, plus les triangles $n o n'$, $x d x'$ moins le secteur $n o c'$, dont on aura les bras de levier par rapport aux points m ou n , on retranchant de $m m'$ ou $n n'$, les distances des centres de gravité à la verticale od , et les formules seront

$$\frac{\sin^2 \delta}{6R(K - \cos \delta)} \left\{ 3BR(2r - R) + R^2(2R - 3r) \frac{\sin(I + \delta)}{\sin I} - r^3 \left(3 \frac{\delta}{\sin \delta} - \frac{r}{\cos^2 \frac{1}{2} \delta} \right) \right\} \dots (F)$$

$$\frac{\sin^2 \delta}{6Kr(1 - \cos \delta)} \left\{ R^2(3B - R) \frac{\sin(I + \delta)}{\sin I} - r^2 \left(3R \frac{\delta}{\sin \delta} - \frac{r}{\cos^2 \frac{1}{2} \delta} \right) \right\} \dots (f)$$

Lorsque le pan dl de la chape est tangent à l'extrados, ce qui donne $B = \frac{R}{\sin I}$ et que l'on fait $\frac{R}{r} = K$, ces formules deviennent

(*) Ces résultats sont tirés du Memorial (N^o 4, page 37).

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6(K - \cos \alpha)} \left\{ \frac{K^2}{\sin I} \left[3(1-K) - (3-2K) \sin(I+\alpha) \right] - \left(3 \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \right) \right\} \dots (F)$$

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6K(1 - \cos \alpha)} \left\{ \frac{K^3}{\sin I} \left[3 - \sin(I+\alpha) \right] - \left(3K \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \right) \right\} \dots (F')$$

Pour le magasin de Nauban, $3(2-K) = 2,28$; $L(3-2K) = 1,76007$ et l'on trouve,

par la formule (F),	par la formule (F'),
pour $\alpha = 53^\circ$... $X = 5,7806$	pour $\alpha = 50^\circ$... $X = 4,5846 = f$
54..... $3,7880 = F$; $L = 0,577766$	59..... $4,6061$
55..... $3,7807$.	

On a donc ainsi

$$f - F = 0,8026 \dots (2)$$

$$\text{et } FL = 28,8703; \mu = 1,94016; \varepsilon = 2,913.$$

Puisque le choc d'une bombe est comparable à un poids et que le bras de levier de ce poids est proportionnel à l'ouverture de la voûte, il paraît convenable de déterminer l'épaisseur $R-r$, d'après la condition que la différence $f-F$ soit pareillement proportionnelle à cette ouverture; soit donc à cette différence pour l'ouverture $2r$; on aura la proportion $25:2r::f-F:d$; d'où en faisant $\frac{2(f-F)}{25} = \mu'$, $d = \mu'r \dots (3)$

d'/ $\mu' = 0,022$ ou $\mu' = 0,064$, selon qu'on emploiera la valeur (1) ou (2).

Si l'on faisait varier l'épaisseur $R-r$, proportionnellement à r , de sorte que les voûtes fussent semblables, les quantités F , f et par conséquent leur différence croîtraient en raison du carré r^2 (Note XIII). D'un autre côté les formules (F), (F'), propres à la voûte en plein cintre, extrapolées horizontalement sont un cas particulier de celles qui viennent d'être établies, et les tableaux de la note citée, montrent que la différence $f-F$ diminue avec l'épaisseur e . Enfin, lorsque l'épaisseur e demeurant constante, le rayon r augmente de plus en plus, le rapport $K = 1 + \frac{e}{r}$ se rapproche de l'unité, valeur qui rend les formules ci-dessus (F), (F') identiques et la différence $f-F$ nulle. On conclut de là que l'épaisseur déterminée d'après la condition (3), croît avec r , mais en moindre raison que celle du carré r^2 .

XV. Sur le N.º 62.

Exemple: supposons le cintre turbaite au tiers et formé avec trois arcs de 60° chacun; soit $\alpha = 10''$, $h = 4$, $R-r$ ou

$R'-r'=3,5$; il s'ensuivra $c=\frac{4}{5}\pi$; $b=6,6667$; $Co=x=4,55342$;
 $r=14,55342$, $r'=5,44658$ et par suite $R=16,05342$, $R'=6,94658$
 L'équation (3) donnera (*)

$$\begin{aligned} \text{pour } \lambda &= 45 \dots \dots \dots X = 12,5248 \\ \lambda &= 46 \dots \dots \dots X = 12,5694 = F \\ \lambda &= 47 \dots \dots \dots X = 12,5900 \\ \lambda &= 48 \dots \dots \dots X = 12,5282 \\ \lambda &= 50 \dots \dots \dots X = 11,6895. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (p) on en tire $\epsilon = 2,1890$.

XVI. Sur le n.º 63.

1. Exemple: prenons le même cintre que dans la note précédente et faisons $h=0$, $R-r$ ou $R'-r'=1$; nous aurons, par la formule (3),

$$\begin{aligned} \text{pour } \lambda &= 45 \dots \dots \dots X = 12,9239, \\ \lambda &= 46 \dots \dots \dots X = 12,9563, \\ \lambda &= 47 \dots \dots \dots X = 13,0888 = F \\ \lambda &= 48 \dots \dots \dots X = 13,0031. \end{aligned}$$

et par l'équation (p), $\epsilon = 0,7416$.

2. S'il s'agissait d'assigner la moindre épaisseur dont cette voûte est susceptible, on emploierait, depuis $\lambda=0$, jusqu'à $\lambda=c=30^\circ$, les formules (F'), (F'') de la voûte en plein cintre, et depuis $\lambda=30^\circ$ jusqu'à $\lambda=90^\circ$, les formules (3), (6) indiquées n.º 63, pour l'épave de voûte qui nous occupe: soit $R-r=0,7416$; on trouvera $\lambda=25^\circ$, $F'=9,4746$ et $\lambda=25^\circ$, $F''=9,4855$; on voit donc que même par rapport aux fouds F', F'' la voûte a encore tout l'épaisseur 0,3, quelque stabilité; d'où l'on peut inférer qu'à ouverture égale le cintre surbaissé comporte une moindre épaisseur que le plein cintre, abstraction faite néanmoins du surcroît de résistance dont les voûtoirs doivent être pourvus, à raison d'une plus grande pression qu'ils ont à supporter.

On achèverait de déterminer la limite inférieure de l'épaisseur de la voûte en élargissant, comme on l'a déjà fait ailleurs, des épaisseurs de plus en plus petites.

XVII. Sur le n.º 68.

Exemple: 1.º soient $h=1,7$; $r=4,45$; $R=5,45$; $a=2,5$;
 $b=4,7$, d'où $R-r=1$, $c=66^\circ$; et $c-\varphi=27^\circ$, à cause de $\varphi=39^\circ$.

(*) Ces résultats sont extraits du Mémoire (N.º IV, page 68).

On mettra d'abord en nombres, les formules (G), (G'), (F), (F') et (n) des n^{os} 52, 54 et 58. On aura

$$\begin{aligned} LK &= 0,0880365. & K &= 1,2247. & L\frac{\pi}{180} &= 2,2418774. \\ LK^2 &= 0,1760730. & Lr &= 0,6633600. & L.64 &= 1,8061800. \\ LK^3 &= 0,2641095. & Lr^2 &= 1,2967200. & \sin c &= 0,0480574 = Lc \\ L(K^2-1) &= 7,6989179. & Lr^3 &= 1,9430800. & L.\tan 37 &= 7,7071659. \\ L(K^3-1) &= 7,927255. & & & Diff' &= 0,3408915 = L\frac{c}{\tan(c-\varphi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= 1,7 & Lc &= 0,0480574 \\ \cos c &= 0,43837 & L(K^2-1) &= 7,6989179 \\ & \frac{2,13837}{2,13837} & Lr^2 &= 1,2967200 \\ \frac{1}{2}(h+\cos c) &= 1,06918 & c.Lz &= 9,6989700 \\ & & & \frac{0,7426655; 5,52926}{\sin c \cos c = 0,394} \\ & & & \frac{5,13524 = \frac{1}{2} r^2 (K^2-1) c - \sin c}{\sin^2 \frac{1}{2} c = 1,4684196.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L.\sin^2 c &= 7,9073206. & L(K^3-1) &= 7,927255. \\ L.\cos c &= 7,6418420. & Lr^3 &= 1,9430800. \\ C.L.6 &= 9,2218487. & L.z &= 0,3010300. \\ L\frac{1}{2}\sin^2 c \cos c &= 7,7710111; n=0,05902 & C.L.3 &= 9,5227877. \\ L.c &= 0,0480574. & L\frac{2}{3}r^3(K^2-1)\sin^2 \frac{1}{2}c &= 1,1401336; n=13,808. \\ L(K^2-1) &= 7,6989179. & & \\ Lr^2 &= 1,2967200. & & \\ L.b &= 0,6020600. & & \\ C.L.z &= 9,6989700. & & \end{aligned}$$

$$L\frac{1}{2}br^3(K^2-1) = 1,3647253; n=22,17.$$

on voit que les formules deviendront

$$\begin{aligned} X &= 0,1161.9,9 \dots (G), & X &= 4,95 \frac{c}{\tan(c-\varphi)} \dots (G') \\ 0,9739 &= \cos \alpha + 1,2247. \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} \dots (F), & F' &= 4,95 \frac{c}{\tan \frac{1}{2} c} - 4,5116 \dots (F') \\ F &= 4,95 \left(1 + \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{\tan \alpha}\right) - 5,5259 \end{aligned}$$

$$E^2 + 4,80287. E = 0,9353. \pi PL \dots (n).$$

Cela posé, les deux (G) et (G') donnent $G = 1,1646$; $g = 10,8517$. Après quelques tâtonnements, on trouve que pour $\alpha = 60^\circ \frac{1}{2}$, le second membre de la première équation (F) est 0,97397; donc $\alpha = 60^\circ \frac{1}{2}$. Substituant cette valeur dans la seconde équation (F'), on obtient $F = 2,3830$ (*) et par l'équation (F'), il vient $F' = 4,3375$. Ainsi la route est stable sur ses naissances.

(*) Il suffit de faire $\alpha = 60^\circ \frac{1}{2}$ dans la formule (F) du n^o 52, pour avoir F' ; mais la formule (F) du n^o 54 ne s'accorde avec celle-ci que pour la valeur de α , à laquelle répond le maximum de X .

Le coefficient de stabilité, $n=2$; d'ailleurs $P=F=2,333$ et $L=h+R-r \cos c = h+r(K-\cos c)$; on peut donc calculer le second membre de l'équation (n).

$$K=1,3348$$

$$\cos c = 0,43837$$

$$K-\cos c = 0,78633; L=7,3956048$$

$$Lr = 0,6483600$$

$$0,5639648; 3,49917$$

$$L=1,7$$

$$L=3,19317;$$

$$L=0,7159341$$

$$L2F=0,6781540$$

$$1,594881; 26,779.$$

Ce second membre est donc 0,9353. 14,779 et l'on trouve $\varepsilon = 2^{\circ} 20$.

En prenant $n=1$, on ne trouverait que $\varepsilon = 0^{\circ} 685$; quantité moindre que ε ou $(R-r) \sin c$ ou 0,8988 (fig. 16). Dans ce cas ε n'est pas bien déterminé, parce que l'équation (n), qui suppose $\varepsilon > (R-r) \sin c$, omet le triangle formé par les lignes fa , fe et le prolongement de la face extérieure du pied-droit.

Si l'on observe que le moment du triangle formé par les lignes af , ai et le prolongement de la face extérieure du pied-droit, est $\frac{1}{6} \varepsilon^3 \cot c$; on trouve cette autre équation

$$\frac{1}{6} \cot c. \varepsilon^3 + \frac{1}{2} h \varepsilon^2 + \frac{1}{2} r^2 (K^2-1) \varepsilon + \frac{1}{2} r^2 (K^2-1) L \varepsilon - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) = n FL,$$

qui suppose la face extérieure du pied-droit, prolongée jusqu'à la ligne infinie oaf . Or, soit X' la force nécessaire pour empêcher la rotation autour du point a et appelons m le moment. . . .

$\frac{1}{2} r^2 (K^2-1) L \varepsilon - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) \sin^2 \frac{1}{2} c$, de la demi-voute par rapport à ce point a ; nous aurons $X' = \frac{m}{r(K-\cos c)}$; mais nous avons $F > X'$,

c'est-à-dire, $F r (K-\cos c) > m$ et comme $L = h + r (K-\cos c)$, on voit que pour $n=1$ et à plus forte raison pour $n > 1$, le terme indépendant de ε , dans la nouvelle équation, qui est du troisième degré, est négatif et que par conséquent cette équation a une racine réelle positive.

La première équation s'emploiera pour $\varepsilon > (K-1)r \sin c$; la seconde, pour $\varepsilon < (K-1)r \sin c$; l'une et l'autre donneront la même valeur de h , lorsqu'on y fait $\varepsilon = (K-1)r \sin c$. On tire de la dernière

$$h = \frac{\frac{1}{2} r^3 \sin c \left[6K(K^2-1) + \frac{2}{3} (K-1)^2 \sin c \cot c \right] - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) \sin^2 \frac{1}{2} c - Fr(K-\cos c)}{F - \frac{1}{2} r^2 (K-1) \sin^2 c}$$

2. soient encore $h=5^m$; $R-r=1^m 5$ et $a=10^m$; $\varepsilon c=60^{\circ}$; d'où $h=2,6795$; $r=20^m$; $R=21^m 5$ et $L=9^m 1795$: on obtiendra $d=0=30$; $F=15,4801$ et $\varepsilon=2^m 7$.

XVIII. Sur le N.° 69.

Exemples: prenons le même intrados que d'abord et supposons, pour le premier cas $h=5^m$; $R-r=1$, nous aurons $\lambda=c=30$; $F=9,3258$ et $\varepsilon=3,0292$. Soient dans le second cas, $h=6^m$; $R-r=c=1,5$; $L=70$; d'où $r=20$; $R=21,5$; $B=5,5593$ et $L=9,6795$; il viendra

$$\text{pour } \lambda=20^\circ \dots X=19,2034,$$

$$\lambda=30=c \dots X=16,9405;$$

ce qui fait voir que le joint de rupture est encore comme dans le second cas de la note précédente, celui de naissance. L'équation (n) donnera $\varepsilon=4,1586$. (*)

On reconnaîtra facilement que dans le second cas ci-dessus, comme dans le second de la note précédente, la voûte glisserait sur le plan de naissance, s'il s'y trouvait un joint, à moins que les arêtes supérieures et inférieures ne fussent reliées entre elles ou chargées d'un poids suffisant.

XIX. Sur le N.° 70.

Exemples: l'usage est de placer le centre o au sommet d'un triangle équilatéral, construit sur la longueur de la plate-bande; alors $c=30^\circ$ ou tang $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et en prenant $a=4$, $c=1$, $h=4$, on trouve $G=1,8277$; $F=7,9444=P$; d'où $\varepsilon=2,851$. Si l'on faisait $c=1,5$ on aurait $G=2,8339$; $F=7,375$; $\varepsilon=2,63$ et avec $c=3,45$ il viendrait $G=F=7,34$. Enfin, que l'on suppose $c=\frac{R-r}{\tan \alpha} = 12$, on aura $F=0$ et $G=38,73$.

Ici donc il y a telles épaisseurs, à la vérité, hors de pratique, pour lesquelles la force G est supérieure à F et doit être employée à sa place, et l'on conçoit que la même chose peut arriver dans d'autres genres de voûtes.

XX. Sur le N.° 73.

Exemple; supposons $\beta=\frac{\pi}{12}$, $R=34$, $r=32$; d'où $h=\frac{2}{16}$; l'équation (F) deviendra

$$2,125 = \frac{2,185}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} - 1,119 \frac{\lambda}{\sin \lambda} + \cos \lambda;$$

ou, la valeur que prend le second membre,

(*) Les résultats de ces exemples ont aussi été pris dans l'ouvrage cité.

pour $\lambda = 60^\circ$ est 2,061.

$\lambda = 65$ 2,094.

$\lambda = 67,50'$ 2,117.

$\lambda = 68$ 2,122,

d'où l'on conclut, par les parties proportionnelles, $\lambda = 68^\circ 18'$. Cette valeur substituée dans la formule (F), donne $F = 220$.

figure 2.



Valeur de la pression exercée par
un prisme quelconque.

incliné BE, et qui s'étend indéfiniment dans les autres sens.

Supposons que la masse ABC soit retenue au moyen d'un plan inflexible AB, par une force p , perpendiculaire à ce plan. Imaginons cette masse décomposée en prismes élémentaires par des plans infiniment voisins, conduits suivant la droite projetée en A; un système de prismes élémentaires, c'est-à-dire, un prisme total ABS, considéré soit isolément soit comme faisant partie d'un autre prisme total ABT, plus étendu, exercera évidemment la même pression, dans les deux cas, contre le plan AB; seulement, cette pression, dans le second cas, sera augmentée ou diminuée par l'action particulière du prisme additionnel AST, ce qui a lieu semblablement pour les voisins d'une demi-circonférence, par rapport à un point du joint vertical. Par conséquent, la pression effective des terres contre le plan AB, répondra à celui de tous les systèmes ou prismes, tels que ABS, qui produira la plus grande pression contre ce plan.

7). Or, nous chercherons d'abord la valeur que doit avoir la force p , pour faire équilibre à un prisme quelconque ABS, au égard au frottement et à la cohésion sur le plan incliné AB. Désignons par q le poids du prisme; par α et θ les angles BAH, BAS; par f le rapport du frottement à la pression et par c la cohésion absolue sur le plan AB. Cela posé, la force p se décompose en deux autres $p \sin \theta$, parallèle, et $p \cos \theta$ perpendiculaire à AB; pareillement, le poids q du prisme se décompose en deux forces $q \cos(\theta - \alpha)$, $q \sin(\theta - \alpha)$ respectivement parallèle et perpendiculaire à AB, de sorte que la condition d'équilibre est

$$p \sin \theta = q \cos(\theta - \alpha) - f[p \cos \theta + q \sin(\theta - \alpha)] - c \dots (1)$$

d'où résulte

$$p = \frac{q[\cos(\theta - \alpha) - f \sin(\theta - \alpha)] - c}{\sin \theta + f \cos \theta} \dots (2)$$

valeur de la pression qu'un prisme quelconque ou dont l'angle BAS est la variable θ , exerce contre le plan opposé AB.

Recherche de l'angle du prisme
de la plus grande pression.

8). Ensuite pour déterminer le prisme de la plus grande pression et cette pression elle-même, on égalera à zéro la différentielle de cette valeur, considérée comme une fonction de la variable θ ; mais auparavant on exprimera les quantités c et q aussi en fonctions de θ ; or, par la supposition que le massif ait une longueur égale à l'unité linéaire, on n'aura que le simple profil à considérer. Indiquant alors

par h la hauteur AH , par δ le poids de l'unité de volume des terres, par γ la cohésion sur l'unité de surface et observant que $AS = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}$ et par conséquent $BS = \frac{h \sin \theta}{\cos \alpha \cos(\theta - \alpha)}$, on obtiendra

$$c = \frac{\gamma h}{\cos(\theta - \alpha)}, \quad q = \frac{\delta h^2 \sin \theta}{2 \cos \alpha \cos(\theta - \alpha)} \dots \dots (3)$$

D'ailleurs le rapport du frottement à la pression est, comme on sait, égal à la tangente de l'inclinaison du plan sur lequel le corps frottant est prêt de glisser, inclinaison qu'on appelle l'angle du frottement; ainsi, φ étant le complément de l'angle du frottement des terres sur elles-mêmes, c'est-à-dire, le complément de l'angle du talus naturel des terres sans cohésion, on aura encore

$$f = \cot \varphi \dots \dots (4)$$

Si l'on substitue ces valeurs, l'expression (3) deviendra

$$p = \frac{\frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} \sin \theta \sin(\varphi + \alpha - \theta) - \gamma \gamma h \sin \varphi}{\cos(\varphi - \theta) \cos(\theta - \alpha)} \dots \dots (5)$$

Par le simple changement des produits de sinus et cosinus en cotangentes linéaires, cette expression prendra la forme

$$p = \frac{\frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} \cot(\varphi + \alpha - \theta) - \left[\frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} (\varphi + \alpha) + \gamma h \sin \varphi \right]}{\cot(\varphi + \alpha - \theta) + \cot(\varphi - \alpha)} \dots \dots (6)$$

Alors la condition $\frac{dp}{d\theta} = 0$, donne immédiatement, quel que soit h ,

$$\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha) \dots \dots (a)$$

Théorème remarquable concernant la valeur de cet angle.

9). Cette formule apprend que dans toutes les hypothèses sur les valeurs non seulement de h , mais encore de δ , γ et φ , l'angle de la section ou du prisme de la plus grande pression est égal à la moitié de l'angle entre le plan AB et le talus naturel des terres privés de leur cohésion; théorème remarquable dont on doit la première indication à M.^r de Prony (Mécanique Philosophique, page 306). La même formule conduit par conséquent à un prisme solide dont le frottement sur le plan incliné serait égal à celui des terres sur elles-mêmes, ce qu'on peut aisément vérifier, et elle fournit la même valeur de θ pour la même terre, soit qu'elle ait été ou non nouvellement remuée; car cette valeur ne dépend que du frottement et nullement de la cohésion.

hauteur sous laquelle la plus grande pression s'exerce.

10). Pour avoir la hauteur h sous laquelle la plus grande pression devient nulle, on égalera à zéro le numérateur de l'expression (5), on y remplacera θ par la valeur (a)

et tend vers zéro; elle n'est donc pas susceptible de minimum absolu, et son minimum relatif répond à $\lambda = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que quand le point d'application de la force X est placé en c' , le joint j' ne se trouve pas au-dehors du joint j ; de sorte que si, par rapport à ce dernier joint, on avait $\cos \lambda < \frac{F}{R}$, on devrait le prendre pour le joint j' et la force capable de faire tourner autour de son extrémité, pour la force F' ; mais on vient de voir qu'on a $\lambda = 0$ ou $\cos \lambda = 1$ et par conséquent $\cos \lambda > \frac{F}{R}$; ainsi, dans ce cas, les formules (F') et (F) doivent être rejetées.

XII. Sur le N.º 54.

Exemples: 1. soit $R = 11^m, 5$; $r = 10^m$; $h = 2^m$; on trouvera d'abord $G = 3,7442$; $g = 19,0868$. Ensuite, la première équation (F) reviendra à

$$0,1615 = 1,15 \left(1 + \frac{\lambda}{\sin \lambda} \cos \lambda \right) - \left(\cos \lambda + \frac{\lambda}{\sin \lambda} \right),$$

et si l'on considère les valeurs extrêmes $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, puis la valeur moyenne $\lambda = \frac{\pi}{4}$, on apercevra dans quelle moitié du quadrant tombe la vraie valeur de λ ; alors il suffira de deux suppositions pour trouver cette valeur à moins de $\frac{1}{2}$ degré près: on parvient ainsi à $\lambda = 57^\circ$, valeur dont la substitution dans la seconde équation (F), donne $F = 9,1801$, et par la formule (F) qui implique $\lambda = \frac{\pi}{2}$ (Note XI), on aura $f = 10,5483$, ce qui montre que les conditions $\left(\frac{F}{R}, \frac{F'}{R'}\right)$, $F < f$ sont satisfaites. Résolvant donc l'équation (n), on en tirera $\varepsilon = 1,6416$. Lorsque dans le premier membre de cette équation (n) on fait $h = 0$ et qu'on y remplace ε par $R - r$, il se réduit à $\frac{1}{2} \pi R(R^2 - r^2) - \frac{2}{3}(R^3 - r^3) = 117,6595$ et exprime le moment de la demi-voute, sans pied-droit, par rapport à l'arête extérieure de son joint de naissance; le second membre qui devient $FR = 108,5710$, dans l'hypothèse de $h = 0$, est alors le moment de la poutre par rapport à la même arête; d'où résulte $M > FR$, comme cela devait être; car, en général, la voute se soutenant d'elle-même sur les joints j, j' , se soutiendra, à plus forte raison, sur deux joints quelconques correspondants et, dans le cas actuel, ces joints j, j' , se confondent avec ceux de naissance.

Il en est autrement pour $R = 11^m$; alors la première équation (F) donne $\lambda = 53^\circ$ environ et l'on trouve $G = 2,4381$; $g = 12,4277$; $F = 6,7858$; $f = 6,4631$; d'où $\left(\frac{F}{R}, \frac{F'}{R'}\right)$ et $F > f$; ainsi la voute ne

ne pourrait se soutenir d'elle-même. En effet, si l'on calcule fR et M on a également 71,0368, tandis que $PL-fR=76,6438$; d'où $M < fR$. On conclut de là que la moindre épaisseur de la voûte qui suffise à l'équilibre est comprise entre 1^{re} et 1^{re},5.

Supposons encore $R-r=\frac{r}{8}$ ou $\frac{R}{r}=\frac{9}{8}$; la première équation (F) donnera $\delta=55^{\circ} 23'$; c'est-à-dire que quand l'équilibre est $\frac{1}{16}$ de l'ouverture de la voûte, le joint J, fait un angle de $55^{\circ} 23'$ avec la verticale. En substituant cette valeur de δ dans la seconde équation (F), on en déduit $F=5,1515(\frac{r}{8})^2$.

XIII. Sur le n.º 56.

1.º Il y a quelques remarques à faire sur ces formules: 1.º la première (G) et les deux des systèmes (F) et (F') donnent $X=0$ pour $\delta=0$, la dernière donnant en outre X infini pour $1-K \cos \delta=0$, ou $\cos \delta=\frac{1}{K}$; 2.º les équations des systèmes (F) et (F') sont généralement satisfaites par $\delta=0$; 3.º (et cela s'applique aux formules du cas précédent) les valeurs de δ auxquelles répondent les maximum et minimum ne dépendent que du rapport K ; il n'en est pas de même des valeurs des limites F, f, F', f' ; mais ces valeurs ont r^2 pour facteur; donc si les voûtes sont semblables les joints relatifs aux limites sont semblablement placés et les valeurs des limites sont proportionnelles aux carrés des rayons des voûtes; 4.º nous n'avons point cherché la condition du maximum de l'expression (G), qui est susceptible d'une opération plus simple, indiquée précédemment: si par exemple, $\varphi=37^{\circ}$, il est clair que la valeur de δ à laquelle répondra le maximum de X sera comprise entre $\delta=0$ et... $\delta=90^{\circ}-37^{\circ}=53^{\circ}$; de sorte que la considération de ces valeurs extrêmes et de quelques valeurs intermédiaires fera bientôt découvrir ce maximum et la valeur respective de δ .

2.º Exemples: soit $\varphi=37^{\circ}$, $r=10$, $R=11$; la formule (G) devient

$$X = \frac{100 \sin \delta}{2 \tan (\delta + 37^{\circ})} \left[2,42 - 1,21 \cos \delta - \frac{\delta}{\sin \delta} \right]; \text{ or, } \delta \text{ est compris entre}$$

0 et 53, valeurs à chacune desquelles répond $X=0$; on considérera donc d'abord la valeur moyenne 26, dont on déduira $X=3,32037$; ensuite la valeur 25, à laquelle répondra:

$X=3,26862$; on conclura de là que la vraie valeur de δ tombe entre 26 et 33; on obtiendra 40, d'où résultera $X=3,0268$; puis 30; 31; 32; 33, qui donneront $X=3,6478$; $X=3,3518$; $X=3,6373$;

$X=3,4463$ et montreront que les valeurs cherchées sont $G=3,4572$
 $\lambda=32$.

Par un semblable procédé on trouve que $\lambda=65$ satisfait à l'équation de condition (F); cette valeur de λ se rapporte à un maximum de X , puisque, pour $\lambda=64$, $\lambda=65$, $\lambda=66$, la formule (F) donne $X=10,271486$; $X=10,277512$; $X=10,277006$ et comme X diminue continuellement pour les valeurs de λ , plus grandes ou plus petites que celle-là, il s'ensuit qu'on a à peu près $F=10,2773$; $\lambda=65$.

L'équation (E) est satisfaite par $\lambda=62$, $\lambda=0$; valeurs qui représentent respectivement à un maximum et à un minimum; en effet, pour $\lambda=61$; $\lambda=62$; $\lambda=63$ la formule (E) donne $X=15,2662$; $X=15,2474$; $X=15,2418$; mais au-delà et en deçà de ce maximum, X décroît continuellement jusqu'à $X=12,2630$, résultant de $\lambda=90$, et $X=10,9697$ donné par $\lambda=0$; de plus une même valeur soit positive soit négative de λ donne la même valeur de X ; il n'existe donc qu'un minimum absolu et l'on a $E=10,9697$; $\lambda=0$.

La racine de l'équation (F') est $\lambda=56$ et si l'on fait $\lambda=0$, $\lambda=55$, $\lambda=56$, $\lambda=57$, $\lambda=90$, dans la formule (F') on en tire $X=9,9667$; $X=12,2532$; $X=12,2548$; $X=12,2534$; $X=9,2635$. Cette racine appartient donc réellement à un maximum et il s'en suit $F'=12,2548$; $\lambda=56$.

Enfin l'équation (E') étant mise en nombres, le second membre devient $6,5613$; mais la plus grande valeur que prenne le premier membre est $6,6983$ qui résulte de $\lambda=69$; il n'existe par conséquent ni maximum ni minimum absolu. Effectivement, la formule (E') donne d'abord X infini pour $\lambda=24^{\circ}37'2''$; ensuite X de plus en plus petit à mesure que λ approche de 90° , valeur pour laquelle $X=13,4894$; à la vérité il vient $X=0$, quand $\lambda=0$; mais cette valeur de X appartenant à la série des valeurs négatives est étrangère à la question. Or il n'existe qu'un minimum relatif $E'=13,4894$, provenant de $\lambda=90$.

On voit donc que la condition $(\frac{F}{f}, \frac{F'}{f'})$, outre les relations $F < f$, $F' < f'$ qui sont indifférentes et qu'abstraction faite du glissement sur les joints de naissance, la voûte se souleverait d'elle-même; mais que le moment de la force F' par rapport au plan des naissances (ce qui pourrait n'avoir pas lieu par rapport à un plan inférieur) surpasse celui de la force F , c'est la première qui doit être substituée au lieu de P

dans l'équation (x). Soient cette substitution et prenant $h=0$, $L=$
 $r=10$, on trouvera $\epsilon=0^m, 6972$. S'il fallait que la voûte fût élevée
sur des pieds-droits de 10^m de hauteur, on aurait $h=10$, $L=20$,
le reste demeurant le même dans cette équation dont on tirerait
 $\epsilon=2^m, 5343$.

Soient toujours $\varphi=37$, $h=0$, $r=10$ et prenons successivement $R=$
 $10^m, 5$; $R=10^m, 3$; $R=10^m, 15$ ou, en appelant e l'épaisseur à
la clef, $e=0^m, 5$; $e=0^m, 3$; $e=0, 25$; nous obtiendrons les résul-
tats classés avec les premiers, dans le tableau ci-joint, selon les
formules (G), (F), (f), (F') et les épaisseurs $0^m, 5$; $0^m, 3$; $0^m, 25$
auxquelles ils se rapportent.

Tableau des Résultats obtenus .

Formules	$e=1^m$		$e=0, 5$		$e=0, 3$		$e=0, 25$	
	Δ	X	Δ	X	Δ	X	Δ	X
(G)	0	0	0	0	0	0	0	0
	31	3, 3518	33	2, 3085	34	1, 7433	35	1, 6365
	32	3, 4572	34	2, 3123	35	1, 7495	36	1, 6382
	33	3, 4663	35	2, 3073	36	1, 7481	37	1, 6320
(F)	35	0	33	0	33	0	33	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	64	10, 3749	67	8, 1707	69	7, 1874	69	6, 9265
	65	10, 3775	68	8, 1737	69	7, 1885	70	6, 9295
(f)	66	10, 3702	69	8, 1703	70	7, 1878	71	6, 9267
	90	8, 4035	90	6, 8237	90	6, 0655	90	5, 8652
(F')	0	10, 9637	0	5, 2460	0	3, 2032	0	2, 5631
	61	15, 2462	65	10, 0827	68	8, 1966	68	7, 7365
	62	15, 2476	66	10, 0889	69	8, 1981	69	7, 7415
	63	15, 2418	67	10, 0887	70	8, 1934	70	7, 7410
(F')	90	12, 2630	90	8, 3915	90	6, 8680	90	6, 5120
	0	9, 9667	0	4, 9958	0	2, 9942	0	2, 4929
	55	12, 2532	64	8, 2580	67	7, 5017	68	7, 1951
	56	12, 2548	65	8, 2537	68	7, 5063	69	7, 1968
(F')	57	12, 2534	66	8, 2503	69	7, 4999	70	7, 1929
	90	9, 2435	90	7, 1623	90	6, 2472	90	6, 0066
(F')	0	-0	0	-0	0	-0	0	-0
	40	∞	38	∞	37	∞	36	∞
	55	19, 1940	39	10, 4595	28	6, 4500	25	5, 4077
	68	17, 6765	42	10, 4649	29	6, 4546	26	5, 4078
(F')	90	15, 4894	90	8, 7676	90	7, 0737	90	6, 6745

Ces calculs s'abrégent beaucoup au moyen de la table des valeurs de la fonction $\frac{a}{\sin \alpha}$ et de leurs logarithmes.

Il est remarquable que la formule (F') qui n'a donné ni maximum ni minimum absolu, pour $e=1$, comporte au contraire l'un et l'autre, pour les trois dernières valeurs de e ; nous n'avons indiqué dans le tableau que le minimum.

En ne considérant que les valeurs définitivement nécessaires, et en employant pour les angles une notation analogue à celle des forces, nous aurons ce tableau sommaire.

Tableau Des Valeurs Finales.

e	G	B	F	A	f	a	F'	A'	f'	a'
1 ^m	3,4572	38	10,2775	65	10,9697	0°	12,2568	56	13,6896	90°
0,5	2,2123	34	8,1737	68	5,3660	0	8,8537	65	8,7476	90
0,3	1,7695	35	7,1885	69½	3,0892	0	7,5263	68	6,4500	28
0,25	1,6382	36	6,9295	70	2,5621	0	7,1968	69	5,4077	25

qui fait voir, d'une part, la marche de chaque force et de l'angle respectif, en conséquence de la diminution d'épaisseur; d'autre part, les changements apportés par cette diminution, soit dans la relation de grandeur des forces, soit dans la relation de position des joints correspondants: 1° le joint j reste confondu avec le joint vertical de la clef, du moins pour les épaisseurs supposées et, ce qui est bien remarquable, le joint J' s'abaisse de plus en plus, on s'approchant de la naissance, tandis que le joint j' d'abord placé à la naissance et au-dessous du joint J' se relève et passe au-dessus, on s'approchant de plus en plus du sommet de la voûte; 2° sous l'épaisseur 0,3 la voûte est encore dans le cas de stabilité ($\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}$), &c. ce n'est qu'ici les forces ont entre-elles les relations $F > f, F' > f'$, qui sont indifférentes; 3°. sous les épaisseurs 0,25 et 0,25 la voûte est dans le cas de rupture ($\frac{J}{J}, \frac{J'}{J'}$), $F' > f'$, qui appartient au second mode.

On conclut de là que la moindre épaisseur à la clef est comprise entre 0,5 et 0,3. Quant à la limite supérieure, si toutefois ce genre de voûte en comportait une, on la déterminerait semblablement en attribuant à e des valeurs de plus en plus grandes que 1^m.

Le développement de ce cas qui est un des plus utiles

nous a fourni l'occasion d'expliquer la manière d'employer les formules, et la distribution des différents exemples a eu pour objet de confirmer notre théorie et d'en faire bien saisir l'esprit.

Selon les nouvelles théories dont nous avons fait mention et dans lesquelles on ne tient pas compte des diverses dispositions des joints et on ne considère que la force F ou la force F' , tant les comparer respectivement aux deux F, F' , on trouve que pour l'épaisseur de 0",3 la voûte se tiendrait d'elle-même, résultat qui manifeste bien la défektivité de ces théories. (voyez 76.4 du Mémorial, pages 32 et 34).

XIV. Sur le N.° 58.

1.° Exemple: Communément on donne aux pans de la chape une inclinaison de 45°; alors, on prenant $r = 5''$, $R = 6''$ et en supposant la droite dl tangente au cercle cf , d'où résulte $B = R\sqrt{2} = 8,4858$, on trouve par la formule (F)

$$\text{pour } \lambda = 45^\circ \dots X = 9,3176,$$

$$\lambda = 46 \dots X = 9,3546 = F$$

$$\lambda = 47 \dots X = 9,3671,$$

$$\lambda = 48 \dots X = 9,3809;$$

Soit de plus $H = 2''$ et substituons ces valeurs dans l'équation (n) nous en déduisons $E = 2''^m,778$ (*).

2.° Nous avons trouvé $F = 3,7790$ et $F' = 4,0819$; d'où résulte

$$F - F' = 0,3029 \dots (c)$$

On a prolongé (N.° 58) le joint $m n$ jusqu'au pan dl de la chape; si on suppose qu'il se replie suivant la verticale nx , alors la partie supérieure $m n x$ de l'équivalent au rectangle $n n' x' x$, plus les triangles $n o n'$, $x d x'$ moins le triangle $n o e'$, dont on aura les bras de levier par rapport aux points m ou n , en retranchant de $m m'$ ou $n n'$, les distances des centres de gravité à la verticale od , et les formules seront

$$\frac{\sin^2 \lambda}{6r(K - \cos \lambda)} \left\{ 3BR(2r - R) + R^2(2R - 3r) \frac{\sin(I + \lambda)}{\sin I} - r^3 \left(3 \frac{\lambda}{\sin \lambda} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} \right) \right\} \dots (F)$$

$$\frac{\sin^2 \lambda}{6Kr(1 - \cos \lambda)} \left\{ R^2(3B - R) \frac{\sin(I + \lambda)}{\sin I} - r^3 \left(3R \frac{\lambda}{\sin \lambda} - \frac{r}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} \right) \right\} \dots (f)$$

Lorsque le pan dl de la chape est tangent à l'extrados, ce qui donne $B = \frac{R}{\sin I}$ et que l'on fait $\frac{R}{r} = K$, ces formules deviennent

(*) Ces résultats sont tirés du Mémorial (N.° 4, page 37).

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6(K - \cos \alpha)} \left\{ \frac{K^2}{\sin I} [3(1-K) - (3-2K) \sin(I+\alpha)] - \left(3 \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \right) \right\} \dots (F)$$

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{6K(1 - \cos \alpha)} \left\{ \frac{K^3}{\sin I} [3 - \sin(I+\alpha)] - \left(3K \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \right) \right\} \dots (F')$$

Pour le magasin de Vauban, $3(2-K) = 2,28$; $L(3-2K) = 1,7600$ et l'on trouve,

par la formule (F),	par la formule (F'),
pour $\alpha = 53^\circ$... $X = 3,7806$	pour $\alpha = 30^\circ$... $X = 4,5866 = F$
54... 3,7800 = F; $L = 0,577164$	53... 4,6061
55... 3,7807.	

On a donc ainsi

$$f - F = 0,8026 \dots (2)$$

$$\text{et } FL = 28,8703; \mu = 1,94016; \varepsilon = 2,913.$$

Puisque le choc d'une bombe est comparable à un poids et que le bras de levier de ce poids est proportionnel à l'ouverture de la voûte, il paraît convenable de déterminer l'épaisseur $R-r$, d'après la condition que la différence $f-F$ soit pareillement proportionnelle à cette ouverture; soit donc à cette différence pour l'ouverture $2r$; on aura la proportion $25:2r::f-F:d$; d'où en faisant $\frac{2(f-F)}{25} = \mu'$, $d = \mu'r \dots (3)$

et $\mu' = 0,022$ ou $\mu' = 0,064$, selon qu'on emploiera la valeur (1) ou (2).

Si l'on faisait croître l'épaisseur $R-r$, proportionnellement à r , de sorte que les voûtes fussent semblables; les quantités F, f et par conséquent leur différence croîtraient en raison du carré r^2 (note XIII). D'un autre côté les formules (F), (F'), propres à la voûte en plein cintre, considérées horizontalement sont un cas particulier de celles qui viennent d'être établies, et les tableaux de la note citée, montrent que la différence $f-F$ diminue avec l'épaisseur e . Enfin, lorsque l'épaisseur e demeurant constante, le rayon r augmente de plus en plus, le rapport $K = 1 + \frac{e}{r}$ se rapproche de l'unité, valeur qui rend les formules ci-dessus (F), (F') identiques et la différence $f-F$ nulle. On conclut de là que l'épaisseur déterminée d'après la condition (3), croîtra avec r , mais on moindre raison que celle du carré r^2 .

XV. Sur le N° 62.

Exemple: supposons le cintre turbaillé au tiers et formé avec trois arcs de 60° chacun; soit $a = 10''$, $h = 4$, $R-r$ ou

$R'-r'=1,5$; il s'ensuivra $c=\frac{1}{5}\pi$; $b=6,6667$; $Co'=x=4,55342$;
 $r=14,55342$, $r'=5,44658$ et par suite $R=16,05342$, $R'=6,94658$
 L'équation (3) donnera (*)

$$\begin{aligned} \text{pour } \lambda &= 45 \dots \dots \dots X = 12,5248 \\ \lambda &= 46 \dots \dots \dots X = 12,5694 = F \\ \lambda &= 47 \dots \dots \dots X = 12,5300 \\ \lambda &= 48 \dots \dots \dots X = 12,5282 \\ \lambda &= 50 \dots \dots \dots X = 11,6895. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (n) on en tire $\varepsilon = 2,1890$.

XVI. Sur le N^o 63.

1^o. Exemple: prenons le même centre que dans la note précédente et faisons $h=0$, $R-r$ ou $R'-r'=1^m$; nous aurons, par la formule (3),

$$\begin{aligned} \text{pour } \lambda &= 45^\circ \dots \dots \dots X = 12,9239, \\ \lambda &= 46 \dots \dots \dots X = 12,9563, \\ \lambda &= 47 \dots \dots \dots X = 13,0888 = F \\ \lambda &= 48 \dots \dots \dots X = 13,0031. \end{aligned}$$

et par l'équation (n), $\varepsilon = 0^m 74 16$.

2^o. S'il s'agissait d'assigner la moindre épaisseur dont cette voûte est susceptible, on emploierait, depuis $\lambda=0$, jusqu'à $\lambda=c=30^\circ$, les formules (F'), (F') de la voûte en plein cintre, et depuis $\lambda=30^\circ$ jusqu'à $\lambda=90^\circ$, les formules (3), (6) indiquées N^o 63, pour l'épave de voûte qui nous occupe: soit $R-r=0,3$; on trouvera $\lambda=35^\circ$, $F'=9,4746$ et $\lambda=23^\circ$, $F'=9,4855$; on voit donc que même par rapport aux forces F', F' la voûte a encore tout l'épaisseur 0,3, quelque stabilité; d'où l'on peut inférer qu'à ouverture égale le cintre surbaissé comporte une moindre épaisseur que le plein cintre, abstraction faite néanmoins du surcroît de résistance dont les voûteaux doivent être pourvus, à raison d'une plus grande pression qu'ils ont à supporter.

On achèverait de déterminer la limite inférieure de l'épaisseur de la voûte en égayant, comme on l'a déjà fait ailleurs, des épaisseurs de plus en plus petites.

XVII. Sur le N^o 68.

Exemples: 1^o soient $h=1^m 7$; $r=4,45$; $R=5,45$; $a=2^m 5$;
 $b=4,4^m$, d'où $R-r=1^m$, $c=64^\circ$; et $c-\varphi=27^\circ$, à cause de $\varphi=37^\circ$.

(*) Ces résultats ont été cités du *Mémoire* (N^o 14, page 68).

On mettra d'abord en nombres, les formules (G), (g), (F), (F') et (m) des n^{os} 52, 54 et 68. On aura

$$\begin{aligned} LK &= 0,0880365. & K &= 1,2247. & L\frac{r}{r_0} &= 2,248776. \\ LK^2 &= 0,1760730. & Lr &= 0,6683600. & L.64 &= 1,8061800. \\ LK^3 &= 0,2641095. & Lr^2 &= 1,2967200. & \text{som.} &= 0,0480574 = Lc \\ L(K^2-1) &= T,6989179. & Lr^3 &= 1,9630200. & L.\tan 27^{\circ} 17' 10'' &= 1,7071659. \\ L(K^3-1) &= T,927255. & & & \text{Diffé.} &= 0,3408915 = L.\frac{c}{\tan(c-\varphi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= 1,7 & Lc &= 0,0480574 \\ \cos c &= 0,43837 & L(K^2-1) &= T,6989179 \\ \frac{2,13837}{\frac{1}{2}(h+\cos c)} &= 1,06918 & Lr^2 &= 1,2967200 \\ & & c.Lz &= 9,6989700 \\ & & & 0,7426655; 5,52926 \\ & & \sin c \cos c &= 0,394 \\ & & & 5,13526 = \frac{1}{2} r^2 (K^2-1) c \cdot \sin c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L.\sin^2 c &= T,9073206. & L.\sin^2 \frac{1}{2} c &= 1,6484196. \\ L.\cos c &= T,6418420. & L(K^2-1) &= T,927255. \\ C.L.6 &= 9,2218487. & L.r^3 &= 1,9630200. \\ L.\frac{1}{2} \sin^2 c \cos c &= 2,7710111; n=0,05902 & L.z &= 0,3010300. \\ L.c &= 0,0480574. & C.L.3 &= 9,528787. \\ L.(K^2-1) &= T,6989179. & L.\frac{2}{3} r^3 (K^2-1) \sin^2 \frac{1}{2} c &= 1,1401336; n=13,808. \\ L.r^2 &= 1,2967200. \\ L.b &= 0,6020600. \\ C.L.z &= 9,6989700. \end{aligned}$$

$$L.\frac{1}{2} Br^3 (K^2-1) = 1,3467253; n=22,17.$$

on voit que les formules deviendront

$$\begin{aligned} X &= 0,1161.9,9 \dots (G), & X &= 4,95 \frac{c}{\tan(c-\varphi)} \dots (g) \\ 0,9739 &= \cos \alpha + 1,2247 \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} \dots (F), & F' &= 4,95 \frac{c}{\tan \frac{1}{2} c} - 4,5116 \dots (F'), \\ F &= 4,95 \cdot (1 + \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{\tan \alpha}) - 5,5259 \end{aligned}$$

$$E^2 + 4,80287. E = 0,9353. \pi PL \dots (m).$$

Cela posé, les deux (G) et (g) donnent $G=1,1496$; $g=10,8517$. Après quelques tâtonnements, on trouve que pour $\alpha=60^{\circ} \frac{1}{2}$, le second membre de la première équation (F) est 0,9739; donc $\alpha=60^{\circ} \frac{1}{2}$. Substituant cette valeur dans la seconde équation (F'), on obtient $F=2,3830$ (*) et par l'équation (F'), il vient $F'=4,3375$. Ainsi la route est stable sur ses naissances.

(*) Il suffirait de faire $\alpha=60^{\circ}$ dans la formule (F) du n^o 52, pour avoir F; mais la formule (F) du n^o 54 ne s'accorde avec celle-ci que pour la valeur de α , à laquelle répond le maximum de X.

Le coefficient de stabilité, $n=2$; d'ailleurs $P=F=2,383$ et $L=h+R-r \cos c = h+r(K-\cos c)$; on peut donc calculer le second membre de l'équation (n).

$$K=1,3245$$

$$\cos c = 0,43837$$

$$K-\cos c = 0,78613; L=7,895608$$

$$Lr=0,6423600$$

$$0,5439648; 3,4997$$

$$L=1,7$$

$$L=5,19317;$$

$$L=0,7159341$$

$$L2F=0,6781540$$

$$1,360881; 24,779.$$

Ce second membre est donc 0,9553. 24,779 et l'on trouve $\varepsilon=2^{\circ},20$.

En prenant $n=1$, on ne trouverait que $\varepsilon=0^{\circ},685$; quantité moindre que ε si on $(R-r) \sin c$ ou 0,8988 (fig. 16). Dans ce cas ε n'est pas bien déterminé, parce que l'équation (n), qui suppose $\varepsilon > (R-r) \sin c$, omet le triangle formé par les lignes fa , fe et le prolongement de la face extérieure du pied-droit.

Si l'on observe que le moment du triangle formé par les lignes af , ai et le prolongement de la face extérieure du pied-droit, est $\frac{1}{6} E^3 \cot c$; on trouve cette autre équation $\frac{1}{6} \cot c. E^3 + \frac{1}{2} h E^2 + \frac{1}{2} r^2 (K^2-1) c E + \frac{1}{2} r^2 (K^2-1) b c - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) = n FL$, qui supposera la face extérieure du pied-droit, prolongée jusqu'à la ligne indéfinie oaf . Or, soit X' la force nécessaire pour empêcher la rotation autour du point a et appelons m le moment. . . . $\frac{1}{2} r^2 (K^2-1) b c - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) \sin^2 \frac{1}{2} c$, de la demi-voute par rapport à ce point a ; nous aurons $X' = \frac{m}{r(K-\cos c)}$; mais nous avons $F > X'$, c'est-à-dire, $F r (K-\cos c) > m$ et comme $L = h + r (K-\cos c)$, on voit que pour $n=1$ et à plus forte raison pour $n > 1$, le terme indépendant de ε , dans la nouvelle équation, qui est du troisième degré, est négatif et que par conséquent cette équation a une racine réelle positive.

La première équation emploiera pour $\varepsilon > (K-1)r \sin c$; la seconde, pour $\varepsilon < (K-1)r \sin c$; l'une et l'autre donneront la même valeur de h , lorsqu'on y fait $\varepsilon = (K-1)r \sin c$. On tire de la dernière

$$h = \frac{\frac{1}{2} r^3 \sin c \left[6K(K^2-1) + \frac{2}{3} (K-1)^3 \sin c \cot c \right] - \frac{2}{3} r^3 (K^3-1) \sin^3 \frac{1}{2} c - F r (K-\cos c)}{F - \frac{1}{2} r^2 (K-1) \sin^2 c}$$

Si l'on met encore $h=5^m$; $R-r=1^m,5$ et $a=10^m$; $2c=60^{\circ}$; d'où $h=2,6795$; $r=20^m$; $R=21^m,5$ et $L=9^m,795$: on obtiendra $\Delta=c=30$; $F=15,4801$ et $\varepsilon=2^m,7$.

XVIII. Sur le N.º 69.

Exemples: prenons le même intrados que d'abord et supposons pour le premier cas $h=5^m$; $R-r=1$, nous aurons $\lambda=c=30$; $F=9,3258$ et $\varepsilon=3,0292$. Soient dans le second cas, $h=6^m$; $R-r=c=1,5$; $I=70$; d'où $r=80$; $R=81,5$; $B=5,5593$ et $L=9,6795$; il viendra pour $\lambda=20^\circ \dots X=19,3034$,
 $\lambda=30=c \dots X=14,9405$;

ce qui fait voir que le joint de rupture est encore, comme dans le second cas de la note précédente, celui de naissance. L'équation (n) donnera $\varepsilon=4,1586$ (*).

On reconnaîtra facilement que dans le second cas ci-dessus, comme dans le second de la note précédente, la voûte glisserait sur le plan de naissance, s'il s'y trouvait un joint, à moins que les attédes supérieures et inférieures ne fussent reliées entre elles ou chargées d'un poids suffisant.

XIX. Sur le N.º 70.

Exemples: l'usage est de placer le centre o au sommet d'un triangle équilatéral, construit sur la longueur de la plate-bande; alors $c=30^\circ$ ou tang $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et on prenant $a=4$, $e=1$, $h=4$, on trouve $G=1,8277$; $F=7,9444=P$; d'où $\varepsilon=2,851$. Si l'on fait $e=1,5$ on aurait $G=2,8339$; $F=7,375$; $\varepsilon=2,63$ et avec $e=3,45$ il viendrait $G=F=7,34$. Enfin, que l'on suppose $e=\frac{8\sqrt{3}}{\tan c}=12$, on aura $F=0$ et $G=38,773$.

Ici donc, il y a telles épaisseurs, à la vérité, hors de pratique, pour lesquelles la force G est supérieure à F et doit être employée à sa place, et l'on conçoit que la même chose peut arriver dans d'autres genres de voûtes.

XX. Sur le N.º 73.

Exemple; supposons $\beta=\frac{\pi}{12}$, $R=34$, $r=32$; d'où $K=\frac{2}{16}$; l'équation (F) deviendra

$$2,125 = \frac{2,185}{\cos^2 \frac{\pi}{12}} - 1,119 \frac{d}{\sin d} + \cos d;$$

où, la valeur que prend le second membre,

(*) Les résultats de ces exemples ont aussi été pris dans l'ouvrage cité.

pour $\lambda = 60^\circ$ est 2,061.

$\lambda = 65$ 2,094.

$\lambda = 67, 30'$ 2,117.

$\lambda = 68$ 2,122,

d'où l'on conclut, par les parties proportionnelles, $\lambda = 68^\circ 18'$. Cette valeur substituée dans la formule (F), donne $F = 220$.

Stabilité des murs de revêtement.

Preliminaires.

Division de la théorie.

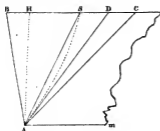
1) La théorie de la stabilité des murs destinés à soutenir des terres, comprend deux questions principales : la première a pour objet l'action des terres sur le mur et en général la poussée que peuvent exercer des terres soutenues ou abandonnées à elles-mêmes, la seconde qui n'est qu'une application de l'autre, consiste dans la détermination de la forme la plus avantageuse et des dimensions convenables au mur qui doit résister à la poussée.

La question de la poussée des terres est une des plus importantes de la science des constructions, sur-tout par rapport à la fortification ; aussi s'en est-on fréquemment occupé dans ce dernier siècle.

Principes de la théorie de Coulomb.

2) Coulomb, dans son mémoire déjà cité, a traité la question en ayant égard aux principales circonstances physiques qui la compliquent, et d'après des considérations aussi exactes qu'ingénieuses, qui joignent à l'avantage de bannir tout arbitraire, celui de conduire à des résultats assez simples pour être appliqués à la pratique.

figure 1.



D'abord l'observation prouve que les terres abandonnées à elles-mêmes, qu'elles soient ou non nouvellement remuées, affectent un talus sensiblement rectiligne. Ensuite il est clair que, le frottement étant supposé proportionnel à la pression normale, le talus naturel AC d'une même terre privée de la cohésion, demeure toujours le même, quelle que soit la hauteur AH ; mais si on est au-dessus du talus naturel AD d'une terre cohérente, lequel dépend, comme on le verra, de la hauteur AH. Le problème déterminé par la section AC n'a que le frottement à vaincre, tandis que sur l'autre section AD, qui est moins inclinée, le problème doit surmonter à la fois la cohésion et le frottement.

Supposons les terres appuyées contre un plan AB, inflexible et dont la résistance fait équilibre à leur action sur lui : d'une part, la masse ABC est, par sa nature, susceptible de se diviser suivant une ligne quelconque AS, droite ou courbe ; d'autre part, la pression exercée par le prisme ASB, contre le plan

AB, dépend de la forme et de la position de la ligne AS; or, parmi toutes les hypothèses qu'on peut faire sur cette ligne, il en existe nécessairement une à laquelle répond le maximum de pression et ce maximum mesure évidemment la pression effective ou la poussée des terres contre le plan AB, par conséquent la résistance dont ce plan doit être capable; car s'il peut soutenir le prisme de la plus grande pression, il soutiendra à plus forte raison, tout autre prisme, quel qu'il soit.

Section de la plus grande pression.

3). La détermination de la courbe AS, appartient à la méthode des variations; mais comme en envisageant la question d'une manière aussi rigoureuse, on pourrait être conduit à des expressions analytiques, trop compliquées, et que d'ailleurs la substitution d'une ligne droite à la courbe dont il s'agit, ne peut évidemment causer d'erreur considérable, nous suivrons l'exemple des Géomètres qui ont traité ce sujet, en regardant à priori le profil AS de la section de la plus grande pression, comme rectiligne.

Distinction entre le prisme de la plus grande pression, et le prisme d'éboulement.

4). Au reste, il ne faut pas croire que si le plan AB venait à céder, ce seraient seulement les terres du prisme de plus grande pression, qui s'écrouleraient: l'éboulement s'étendrait jusqu'au talus naturel AD ou AC. Nous reviendrons là-dessus en son lieu.

Hypothèses préliminaires.

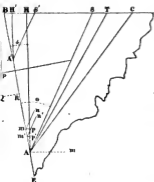
5). Nous supposerons le mur d'une seule pièce et établi sur une base inébranlable, nous réservant d'examiner ensuite ces hypothèses. Nous supposerons aussi que le frottement soit proportionnel à la pression normale et que la cohésion ainsi que la densité des terres soit uniforme dans toute l'étendue de leur masse; ou que ces quantités n'éprouvent, en général, que de légères variations dans un même terrain, sur les hauteurs que l'on a à considérer dans la pratique. Enfin, nous ferons abstraction de l'adhérence et du frottement des terres contre le parement intérieur AB du mur de soutènement, ce qui en favorisant la solidité simplifiera la question.

De la poussée des terres, abstraction faite de l'adhérence et du frottement sur le plan qui les soutient.

Des la pression effective ou poussée des terres contre le mur qui les soutient.

6). Soit ABC le profil d'une masse de terre, qui se termine d'un côté, au plan horizontal BC, d'un autre côté, au plan

figure 2.



Valeur de la pression exercée par
un prisme quelconque.

incliné BE, et qui s'étend indéfiniment dans les autres sens.

Supposons que la mathe ABC soit étendue au moyen d'un plan inflexible AB, par une force p , perpendiculaire à ce plan. Imaginons cette mathe décomposée en prismes élémentaires par des plans infiniment voisins, conduits suivant la droite projetée en A; un système de prismes élémentaires, c'est-à-dire, un prisme total ABS, considéré soit isolément soit comme faisant partie d'un autre prisme total ABT, plus étendu, exercera évidemment la même pression; dans les deux cas, contre le plan AB; seulement, cette pression, dans le second cas, sera augmentée ou diminuée par l'action particulière du prisme additionnel AST, ce qui a lieu semblablement pour les voutoirs d'une demi-voute, par rapport à un point du joint vertical. Par conséquent, la pression effective des terres contre le plan AB, répondra à celui de tous les systèmes ou prismes, tels que ABS, qui produira la plus grande pression contre ce plan.

7). Ainsi, nous chercherons d'abord la valeur que doit avoir la force p , pour faire équilibre à un prisme quelconque ABS, en égard au frottement et à la cohésion sur le plan incliné AS. Désignons par q le poids du prisme; par θ et θ' les angles BAH, BAS; par f le rapport du frottement à la pression et par c la cohésion absolue sur le plan AS. Cela posé, la force p se décompose en deux autres $p \sin \theta$, parallèle, et $p \cos \theta$ perpendiculaire à AS; pareillement, le poids q du prisme se décompose en deux forces $q \cos(\theta - \theta')$, $q \sin(\theta - \theta')$ respectivement parallèle et perpendiculaire à AS, de sorte que la condition d'équilibre est

$$p \sin \theta = q \cos(\theta - \theta') - f[p \cos \theta + q \sin(\theta - \theta')] - c \dots (1)$$

d'où résulte

$$p = \frac{q[\cos(\theta - \theta') - f \sin(\theta - \theta')] - c}{\sin \theta + f \cos \theta} \dots (2)$$

valeur de la pression qu'un prisme quelconque ou dont l'angle BAS est la variable θ , exerce contre le plan opposé AB.

Recherche de l'angle du prisme
de la plus grande pression.

8). Ensuite pour déterminer le prisme de la plus grande pression et cette pression elle-même, on égalera à zéro la différentielle de cette valeur, considérée comme une fonction de la variable θ ; mais auparavant on exprimera les quantités c et q aussi en fonctions de θ ; or, par la supposition que le massif ait une longueur égale à l'unité linéaire, on n'aura que le simple profil à considérer. Indiquant alors,

par h la hauteur AH , par δ le poids de l'unité de volume des terres, par γ la cohésion sur l'unité de surface et observant que $AS = \frac{h}{\cos(\theta - \alpha)}$ et par conséquent, $BS = \frac{h \sin \theta}{\cos \alpha \cos(\theta - \alpha)}$, on obtiendra

$$c = \frac{\gamma h}{\cos(\theta - \alpha)}, \quad q = \frac{\delta h^2 \sin \theta}{2 \cos \alpha \cos(\theta - \alpha)} \dots \dots (3)$$

D'ailleurs le rapport du frottement à la pression est, comme on sait, égal à la tangente de l'inclinaison du plan sur lequel le corps frottant est prêt de glisser, inclinaison qu'on appelle l'angle du frottement; ainsi, φ étant le complément de l'angle du frottement des terres sur elles-mêmes, c'est-à-dire, le complément de l'angle du talus naturel des terres sans cohésion, on aura encore

$$f = \cot \varphi \dots \dots (4)$$

Si l'on substitue ces valeurs, l'expression (3) deviendra

$$p = \frac{\frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} \sin \theta \sin(\varphi + \alpha - \theta) - \gamma \gamma h \sin \varphi}{\cos(\varphi - \theta) \cos(\theta - \alpha)} \dots \dots (5)$$

Pour le simple changement des produits de sinus et cosinus en cosinus linéaires, cette expression prendra la forme

$$p = \frac{\frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} \cos(\varphi + \alpha - \theta) - \left[\frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} (\varphi + \alpha) + \gamma \gamma h \sin \varphi \right]}{\cos(\varphi + \alpha - \theta) + \cos(\varphi - \alpha)} \dots \dots (6)$$

Alors la condition $\frac{dp}{d\theta} = 0$, donne immédiatement, quel que soit h ,

$$\theta = \frac{\alpha}{2} (\varphi + \alpha) \dots \dots (a)$$

On remarquera concernant la valeur de cet angle.

9). Cette formule apprend que dans toutes les hypothèses sur les valeurs non seulement de h , mais encore de δ , γ et φ , l'angle de la section ou du prisme de la plus grande pression est égal à la moitié de l'angle entre le plan AB et le talus naturel des terres privés de leur cohésion; théorème remarquable dont on doit la première indication à M.^r de Prony (Mécanique Philosophique, page 304). La même formule conduit par conséquent à un prisme solide dont le frottement sur le plan incliné serait égal à celui des terres sur elles-mêmes, ce qu'on peut aisément vérifier, et elle fournit la même valeur de θ pour la même terre, soit qu'elle ait été ou non nouvellement remuée; car cette valeur ne dépend que du frottement et nullement de la cohésion.

hauteur sous laquelle la plus grande pression s'annule.

10). Pour avoir la hauteur h sous laquelle la plus grande pression devient nulle, on égalera à zéro le numérateur de l'expression (5), on y remplacera θ par sa valeur (a)

et l'on trouvera tout de suite

$$h' = \frac{2\gamma \sin \varphi \cos \alpha}{\delta \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)} \quad (b)$$

Ayant substitué dans la même expression (5), la valeur de θ et au lieu de $2\gamma \sin \varphi \cos \alpha$, la valeur tirée de (b), on fera, afin d'abréger,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)}{\cos \alpha \cos \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)} = r \quad (c)$$

et l'on aura pour la valeur de la plus grande pression P , c'est-à-dire, de la pression effective contre le plan AB , supposé inébranlable,

$$P = \frac{1}{2} \delta h (h - h') r^2 \cos \alpha \quad (d)$$

laquelle, comme on le voit, dépend de la cohésion.

Expression du rapport entre la base et la hauteur du prisme de la plus grande pression.

11). Nous avons trouvé en général $BS = \frac{h \sin \theta}{\cos \alpha \cos(\theta - \alpha)}$; substituons la valeur de θ ; il viendra $\frac{BS}{h} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)}{\cos \alpha \cos \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)}$. Ainsi la

quantité représentée par r exprime le rapport de la base à la hauteur du triangle de la plus grande pression.

Formules particulières au cas où le paracment intérieur est vertical.

12). Bien entendu que dans ces formules, α est positif ou négatif selon que l'angle ABM des terres à soutenir est obtus ou aigu. Si le paracment intérieur du mur était vertical, α serait nul: alors on désignant par h , ce que devient h' et observant que $\varphi = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi$, on aurait,

$$\theta = \frac{1}{2} \varphi \quad (a')$$

$$h' = \frac{4\gamma}{\delta \tan \frac{1}{2} \varphi} \quad (b')$$

$$r = \tan \frac{1}{2} \varphi \quad (c')$$

$$P = \frac{1}{2} \delta h (h - h') \tan^2 \frac{1}{2} \varphi \quad (d')$$

Influence de la cohésion des terres sur la plus grande pression.

13). La formule très-simple (d) qui détermine dans tous les cas la valeur de la plus grande pression, montre, à la seule inspection, que cette valeur est négative pour toutes les hauteurs moindres que h' et qu'en général elle est plus grande pour la même terre, quand la cohésion est détruite que quand elle existe, de toute la quantité $\frac{1}{2} \delta h' r^2 \cos \alpha$.

Applications de la formule de la pression au cas de la fluidité.

14). Si au lieu de terres il s'agit d'un fluide parfait, on aurait $\varphi = 90^\circ$ et $\gamma = 0$; d'où $h' = 0$: alors à cause de $\sin \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) = \cos \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$, il viendrait $r = \frac{1}{\cos \alpha}$; la formule (d) donnerait en conséquence

$$P = \frac{\delta h^2}{2 \cos \alpha} \quad (e)$$

valeur qui résulte également de l'expression (5) et cela, quel que

soit 0, puisque $\sin(90^\circ + \alpha - \theta) = \cos(\theta - \alpha)$ et $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$. Ordonne que le plan AB soutient un fluide, tous les prismes tels que ABS exercent contre ce plan la même pression, laquelle est égale au poids d'un volume de fluide, qui aurait pour base le plan AB et pour hauteur la distance du centre de gravité de ce plan au niveau BC, conclusion tout-à-fait conforme aux principes de l'hydrostatique.

Relation entre les hauteurs sous lesquelles la plus grande pression des terres s'exerce verticalement et sous une inclinaison donnée, devient nulle.

15). De l'élimination de θ entre (b) et (b') il résulte

$$h' = h \frac{\cos \alpha \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)} \dots \dots \dots (e)$$

formule qui se prête fort bien au calcul logarithmique et à laquelle nous reviendrons dans la suite.

Recherche du moment de la plus grande pression par rapport au pied du parement intérieur du revêtement.

16). Pour trouver le point d'application de la force P, nous déterminerons d'abord, comme l'a fait Coulomb, le moment de cette force relativement au point A, pied du parement intérieur du revêtement. La pression sur un élément quelconque $m m'$ du plan AE, est évidemment indépendante de la hauteur totale AH des terres, mais dépend de la profondeur Hp à laquelle cet élément se trouve. Donc si l'on substitue dans l'équation (d) à la hauteur h, la hauteur Hp = x, comptée depuis le point H et que l'on différencie cette équation par rapport à x, la pression supportée par le rectangle élémentaire $m m'$ répondant à l'accroissement pp' ou dx , de la hauteur x, sera

$$dP = \delta r^2 \cos \alpha \left(x - \frac{1}{2} h\right) dx;$$

mais la distance du point d'application de cette pression au point A, est évidemment $\frac{h-x}{\cos \alpha}$; ainsi, en appelant M le moment de la force P, on aura

$$dM = \delta r^2 (h-x) \left(x - \frac{1}{2} h\right) dx;$$

intégrant depuis $x = h'$ jusqu'à $x = h$, on obtiendra

$$M = \frac{1}{6} \delta r^2 (h-h')^2 \left(h + \frac{1}{2} h'\right) \dots \dots \dots (f)$$

expression du moment de la plus grande pression.

Expression du bras de levier de cette force.

17). Le quotient de M divisé par P, c'est-à-dire,

$$\frac{(h-h')(h + \frac{1}{2} h')}{3h \cos \alpha}, \text{ ou } \frac{1}{3} \frac{h-h'}{\cos \alpha} + \frac{1}{6} \frac{h'}{h} \frac{h-h'}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (g)$$

sera la distance du point A au point cherché. On voit qu'elle est comprise entre le tiers et la moitié de la partie AA' de AB, effectivement trémière à la pression des terres; savoir, entre les deux distances relatives au cas d'un fluide parfait et à celui d'un corps solide.

Connaissant cette distance on pourra évaluer le moment de la plus grande pression P , par rapport à tel autre point que l'on voudra du plan ABC .

Distinction entre le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression.

18). Supposons que le plan AB , au moyen duquel une puissance normale, appliquée, par exemple, en B , doit faire équilibre à l'action des terres, soit mobile autour de la droite A , comme charnière: s'il existait des prismes dont les pressions particulières, quoique moindres que la plus grande pression eussent néanmoins, par rapport au point A , des moments supérieurs à celui de cette plus grande pression, ce serait évidemment au plus grand de ces moments et non pas au moment de la plus grande pression, que celui de la puissance devrait équivaloir, sans quoi le plan AB serait infailiblement renversé; de sorte que la pression effective contre le plan serait seulement égale à celle du prisme du plus grand moment et n'atteindrait pas jusqu'à la plus grande pression, laquelle ne pourrait point s'engendrer.

Il y a donc lieu de distinguer, dans l'hypothèse présente, le moment de la plus grande pression et le plus grand moment de pression et de s'assurer s'ils diffèrent ou non l'un de l'autre.

Stabilité de ces moments, par rapport à un point quelconque du plan vertical, passant par la direction de la plus grande pression.

19). La pression sur un élément mm' , produite par un prisme quelconque ABC , est égale (N°. 18) à la différentielle de la pression totale de ce prisme; donc la plus grande pression sur l'élément mm' est égale à la différentielle de la plus grande pression P ; or, comme le bras de levier mA est constant, le moment de la pression sur mm' est un maximum au même tems que cette pression; d'où il suit que le plus grand moment de pression sur le plan entier AB et par rapport au point A , est identique avec le moment de la plus grande pression P sur ce plan. Il en serait de même par rapport à tout autre point que A de AB .

On conclut de là que l'identité des deux moments subsiste pour un point quelconque Q du plan ABC ; en effet, si l'on mène la perpendiculaire QR sur AB : puisque la pression est parallèle à QR , les moments de cette force par rapport aux points R et Q ne diffèrent nullement, non plus que les maximums de ces moments; or le premier maximum est identique avec le moment de la plus grande pression; donc le second l'est pareillement.

C'est la plus grande pression constituée la pression effective, ou la poussée des terres contre le plan AB qui les soutient.

Des principes tels et tels qu'on peut conclure dans les cas suivants.

20). La pression du prisme ABS que détermine le plan sécant AB , a des valeurs différentes suivant la situation de ce plan et la direction dans laquelle la pression est obtenue; réciproquement, le plan AB a des situations différentes suivant la direction et la valeur qu'on attribue à la pression du prisme ABS .

Néanmoins la situation du plan AB est indépendante de la direction dans laquelle la pression est obtenue, lorsque celle-ci doit être nulle; car, le prisme étant alors en équilibre de lui-même sur le plan incliné AB , ce qui s'exprime par l'équation

$$q \cos(\theta - \alpha) = f q \sin(\theta - \alpha) + c;$$

il s'en suit que la pression est nulle dans toute direction.

1°. On peut déterminer la valeur de la pression obtenue parallèlement à une section quelconque AB , et on conclure l'angle θ de cette section, sous lequel la pression ainsi obtenue devient nulle. L'équation du second degré à laquelle on parvient et qui est indépendante de la direction attribuée à la pression, est analogue à celle que M^r. de Prony a trouvée pour le cas particulier de $\alpha = 0$ et en obtenant la pression perpendiculairement au plan AB (Mécanique philosophique, N^o 359). Mais ce Géomètre a confondu la section dont il s'agit avec le talus naturel des terres cohérentes, lequel, comme on va le voir est tout différent de cette section. On reste les deux valeurs de θ qu'on peut toujours évaluer désignées (regarder comme positives) par θ' et θ'' , les coefficients de l'équation donnent immédiatement la relation $\theta' + \theta'' = \varphi + \alpha$; ce qui prouve que les deux sections obtenues font des angles égaux avec celle de la plus grande pression obtenue perpendiculairement à AB , et en même temps indique l'existence d'un maximum de la pression obtenue dans tel sens qu'on voudra.

2°. On peut considérer la section de la plus grande pression parallèle à cette section, et déterminer, en général, tant l'angle t de la section que la valeur P de la plus grande pression et, en particulier, l'angle φ ainsi que la hauteur h sous lesquels cette plus grande pression devient nulle. La valeur t est généralement moindre que la plus grande des deux valeurs ci-dessus θ' et θ'' ; ce qu'on reconnaît imméd-

en substituant l'expression générale de la pression parallèle à une section. Cette valeur φ , bien qu'elle soit unique, dépend d'une équation du troisième degré, laquelle se vérifie par $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \delta)$ et $h = h'$. Les valeurs particulières φ' et h' , qu'il est aisé d'obtenir directement, sont effectivement celles qu'on veut d'indiquer, qui ramènent à l'équation (c) et s'admettent uniquement l'une l'autre. On conclut de là que l'angle de la section de la plus grande pression parallèle à cette section varie avec la hauteur h et ne devient $\frac{1}{2}(\varphi + \delta)$ que si $h = h'$, auquel cas la plus grande pression s'annule.

On la poutée absolue des terres;
hauteur à laquelle on peut les pousser sans
un angle donné sans qu'elles s'éboulent.

31). La plus grande pression dans cette direction particulière mesure l'effort que des terres abandonnées à elles-mêmes, sont capables de faire pour se rompre et constituer proprement ce qu'on doit entendre par la poutée absolue des terres. Or, puisque cette poutée absolue s'annule pour $h = h'$ et que la pression parallèle à une section plus ou moins inclinée que celle de la poutée absolue devient négative, ainsi qu'il résulte de la démonstration (b. de la note IV) de l'expression (8); il s'en suit que les terres se soutiendront d'elles-mêmes, sur la hauteur h' et sous l'angle donné δ .

Mais nous avons désigné par h' dans la formule (B), la hauteur sous laquelle les terres n'exercent plus de pression perpendiculairement au plan AB, faisant un dehors un angle δ avec la verticale ou un angle $90^\circ - \delta$ avec l'horizon; le résultat $h = h'$ démontre que cette hauteur h' est aussi celle à laquelle les terres peuvent se soutenir sous l'angle $90^\circ - \delta$, par leur propre cohésion. Pareillement, la hauteur h , qui entre dans la formule (B), est celle sur laquelle on peut couper les terres à pic, sans qu'elles s'éboulent.

Angle du talus naturel des terres
cohérentes.

32). L'équation (c) dans laquelle on écrirait h au lieu de h' pourra donc être regardée comme exprimant la relation entre la hauteur des terres, et l'angle sous lequel ces terres étant coupées, leur poutée absolue devient nulle; et de même que h' indique la valeur de h qui répond à une valeur donnée de δ , réciproquement nous désigneront par φ' la valeur de δ , relative à une hauteur donnée h . Or, il est clair que cet angle φ' ainsi lié avec la hauteur h , n'est autre que celui du talus naturel des terres cohérentes.

33) Les deux racines de l'équation du second degré, qui déterminent l'angle de ce talus sont réelles et de signes contraires,

on sorte qu'il existe deux talus dirigés de part et d'autre de la verticale, tous les deux et sur la hauteur donnée h , les terres se soutiendront d'elles-mêmes, la rupture tendant à s'opérer sous l'angle $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$. En ne considérant que la racine positive on aura donc $\varphi' < \varphi$; ainsi les deux talus sont au-dessus de celui dont l'angle est φ .

22^e l'équation qui détermine l'angle du talus.

23^e. Il résulte de la discussion précédente que si des terres élevées sur une hauteur h plus grande que h' , cessent tout-à-coup d'être soutenues, les molécules composant le prisme déterminé par la section dont l'angle est $\theta' - \delta$ avec la verticale, resteront unies entre-elles, tandis que les molécules comprises entre cette section et celle qui répond à l'angle $\theta - \varphi$ se désuniront nécessairement. Ainsi, lorsqu'un mur de revêtement vient à céder, le prisme qui se détache n'est pas seulement celui de la plus grande pression relative, ou perpendiculaire au parement intérieur, c'est-à-dire, celui qui se termine à la section dont l'angle avec la verticale est $\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$; ce n'est pas seulement non plus le prisme de la poussée absolue, lequel est terminé à la section dont l'angle est $t - \delta$, plus grand que $\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$; mais c'est tout le prisme qui s'étend jusqu'au talus naturel, dont l'angle est $\varphi' > t - \delta$.

Par exemple, dans le cas des terres cohérentes, supposé que $\delta = t$ la section de la plus grande pression relative et celle de la poussée absolue se confondent en un seul plan qui est vertical et les valeurs de $\tan(\theta' - \delta)$, $\tan(\theta - \delta)$ se réduisent à $\pm \tan \varphi \sqrt{\frac{1 - m}{1 + m \tan^2 \varphi}}$; or, il est évident que l'éboulement ne s'arrêtera pas à ce plan vertical et qu'il s'étendra de l'autre côté jusqu'à la section qui fait avec lui l'angle φ' .

Par exemple encore, dans le cas des terres meubles ou sans cohésion sensible, l'angle de la section de la plus grande pression relative est toujours $\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$; celui de la section de la poussée absolue est plus grand que $\frac{1}{2}(\varphi - \delta)$, mais moindre que φ' et l'on a $\varphi' = \varphi$; or il est bien clair que l'éboulement se portera jusqu'à cette dernière limite.

Il est donc certain que le prisme d'éboulement et celui de la poussée sont tout différents, et c'est une erreur manifeste que de les avoir confondus, comme on l'a fait, dans la théorie, sur-tout dans les expériences entreprises pour la vérifier.

Moyen d'évaluer la cohésion des
terres.

25). De la formule (b) on tire réciproquement

$$h = \frac{1}{2} H \tan^2 \frac{1}{2} \varphi. \dots \dots (h)$$

la force de la cohésion des terres se conclura donc de leur pesanteur spécifique, du talus qu'elles affectent lorsque leur cohésion est détruite et de la plus grande profondeur à laquelle elles peuvent, lorsque leur cohésion subsiste, être coupées à pic, sans s'écrouler; toutes données dont la connaissance résulte d'expériences fort simples et peu dispendieuses. Il s'agit de déterminer de H , par la formule (c) ou de déterminer par une expérience immédiate. C'est à M.^r de Prony qu'est due l'idée de ce moyen aussi curieux qu'utile d'évaluer la cohésion des terres (Mécanique philosophique, page 304).

Problème relatif aux hauteurs
et talus des excavations et terres à terre.

26). La formule (c), que nous allons reprendre et dans laquelle nous écrirons H au lieu de H' , s'applique très-utilement à la construction des ouvrages en terre, tels que fossés, retranchements, digues, chaussées, &c., et parce qu'ici l'angle du talus des terres avec la verticale est intérieur, nous ferons $\alpha = -\varphi$; nous aurons en conséquence.

$$h = H \frac{\cos \varphi \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')} \dots \dots (c')$$

équation qui exprime la relation entre la hauteur et l'angle du talus d'une excavation ou d'une levée de terre; sous la condition que la poussée absolue soit nulle; de sorte qu'on peut déterminer l'une de ces deux choses, la hauteur et le talus, quand l'autre est donnée, pourvu que l'on connaisse aussi la qualité des terres, c'est-à-dire, l'angle de leur talus naturel, la cohésion étant détruite, et la hauteur à laquelle elles sont capables de se soutenir à pic, la cohésion subsistant.

La première question, dans laquelle H , φ et φ' étant donnés, on cherche la quantité h est immédiatement résolue: par exemple, si le talus d'une excavation doit être 0^m,40 de base sur 1 de hauteur, supposez que le talus naturel des terres soit 1 de base sur 1 de hauteur, on a $\tan \varphi = \frac{1}{1}$, $\tan \varphi' = \frac{0,40}{1}$, ou $\varphi' = 21^{\circ} 48' 5''$, $\varphi = 45^{\circ}$ et l'on trouve $H = 3,36 \cdot h$.

La seconde question, beaucoup plus usuelle et où il s'agit de déterminer φ' , connaissant h ainsi que H , et φ , n'offre pas la même facilité. C'est comme on l'a vu, celle du talus naturel des terres cohérentes.

Soit $\frac{h}{H} = m$, si l'on substitue pour $\sin^2 \frac{1}{2} \varphi$ et $\sin^2 \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')$

leurs valeurs $\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$ et $\frac{1}{2}[1-\cos(\varphi-\varphi')]$ et que l'on développe $\cos(\varphi-\varphi')$, la formule (c) deviendra

$$[\cos\varphi + m(1-\cos\varphi)]\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' = 1. \dots\dots\dots (i)$$

L'équation (i) ne serait que du second degré par rapport à $\tan\varphi'$ comme par rapport à $\tan(\varphi-\varphi')$; mais on parviendrait à des résultats plus commodes, au moyen d'angles auxiliaires; je pose d'abord

$$\cot A = m \tan\varphi' \dots\dots\dots (j)$$

d'où résulte $m = \frac{\sin\varphi\cot A}{1-\cos\varphi}$, à cause de $\tan\varphi' = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Substituant les valeurs $(\cot\varphi + \cot A)\cos\varphi' + \sin\varphi' = \frac{1}{\sin\varphi}$; faisant ensuite $\cot B = \cot\varphi + \cot A$, c'est-à-dire,

$$\cot B = \frac{\sin(A+\varphi)}{\sin A \sin\varphi} \dots\dots\dots (j')$$

j'ai finalement

$$\cos(B-\varphi') = \frac{\sin B}{\sin\varphi} \dots\dots\dots (K)$$

Les angles A et B se calculeront aisément par les formules (j) et (j') et la dernière (K) donnera tout de suite la valeur de $B-\varphi'$ ou de $\varphi'-B$.

Par exemple, si $h=4^m$; $h_1=0^m,9$ et que le talus naturel des terres soit $1^m,2$ de base sur 1^m de hauteur; d'où résulte $\frac{h_1}{h} = \frac{0,9}{4}$, $\tan\varphi' = \frac{3,2}{4}$ et $\varphi = 50^\circ 11' 45''$, on trouve $A = 85^\circ 53'$, $B = 46^\circ 48' 40''$; $B-\varphi' = 18^\circ 21' 50''$, $\varphi' = 28^\circ 26' 50''$ et $\tan\varphi' = 0,54$; c'est la base du talus demandé, toujours sur 1 de hauteur.

Remarque sur l'application de formule 37). Quoique la valeur de h ou de φ' soit ainsi déduite d'une équation d'équilibre, il ne sera pas à craindre que les terres ne se soutiennent point sur la hauteur ou tout le talus trouvé par le calcul, pourvu que dans les expériences par lesquelles on aura déterminé h_1 , on ait eu égard aux causes accidentelles qui peuvent rompre l'équilibre des terres, ce qu'on fait en coupant à pic une même terre sur différentes hauteurs, la laissant exposée assez longtemps aux variations météorologiques et prenant pour h_1 la plus grande hauteur sous laquelle cette terre aura résisté. Une autre observation, c'est que dans la théorie, on suppose la densité et la cohésion uniformes; or, d'un côté, la densité peut bien augmenter avec la profondeur à raison du poids des couches supérieures; d'un autre côté, il peut arriver que la cohésion, après avoir paru sensiblement constante jusqu'à une certaine profondeur, s'affaiblisse ensuite par l'effet de l'humidité des couches inférieures; il est bon d'avertir que dans ces sortes de cas les formules devront être appliquées avec circonspection.

Résultats de l'expérience sur la pesanteur spécifique, le frottement et la cohésion des terres.

38). Nous terminerons la théorie de la poussée des terres, en rapportant ce que l'expérience a appris sur les données nécessaires à l'application des formules :

1°. Pesanteur spécifique des terres, le poids de l'eau étant pris pour unité ;

Terres				Sables	
Végétale.	Franche.	Argileuse.	Glaive.	Commune.	Fine.
1,4	1,5	1,6	1,7	1,7	1,9

2°. Rapport du frottement à la pression, lequel s'exprime par la tangente de l'angle du talus qu'affectent les terres, quand leur cohésion est détruite.

Suivant les expériences de M. Prondelet (art de bâtir, tome 3, pag. 135, 139, 141) l'angle du talus naturel, pour le sable fin, bien sec au point le plus pulvérisé, est de $34^{\circ} 30'$; pour la terre ordinaire, bien sèche et pulvérisée, de $46^{\circ} 50'$ au moins, et, si elle est légèrement humectée, de 54° au plus ; ce qui donne respectivement les valeurs 0,69... 0,94... 1,38 de ξ ou les valeurs $55^{\circ} 30'$, $43^{\circ} 10'$, 36° de φ .

3°. Cohésion des terres.

On manque d'observations précises à ce sujet : tout ce qu'on sait, c'est qu'on fait de terre tassée ou qui ont éprouvé une grande compression, la terre franche et les terres fortement argileuses, peuvent, sans s'ébouler, être coupées à pic, respectivement sur une hauteur de 1 à 2 m et 3 à 4 ou même davantage.

En prenant, pour la terre franche, $\delta = 1500^{\text{kg}}$, $H_1 = 1^{\text{m}}$, $\varphi = 46^{\circ}$ et, pour les terres les plus fortes, $\delta = 1800^{\text{kg}}$, $H_1 = 4^{\text{m}}$, $\varphi = 35^{\circ}$, on trouvera par la formule (H_1), $\gamma' = 136^{\text{kg}}$ et $\gamma' = 568^{\text{kg}}$, résultats qu'on peut regarder comme les deux limites des valeurs du coefficient γ' de la cohésion des terres.

Application de la théorie de la poussée des terres à la détermination de l'épaisseur des murs de revêtement

Détermination de l'épaisseur des revêtements.

39). Un mur destiné à soutenir des terres, étant regardé comme un corps continu, assis sur une base incompressible, peut céder à leur action de deux manières différentes ; il peut être renversé en tournant autour de l'arête antérieure de sa base, ou renversé horizontalement en glissant sur cette

bak, de sorte qu'il ne résiste, dans le premier cas, que par son propre poids et, dans l'autre, par l'adhérence et le frottement sur la fondation.

Pour plus de généralité, nous attribuerons au revêtement une hauteur H différente de la hauteur h des terres qu'il est destiné à soutenir; cette dernière sera la hauteur réduite quand le remblai se trouvera surchargé d'une masse de terre ou d'un poids quelconque, c'est-à-dire qu'on remplacera la surcharge par un trapèze équivalent dont les deux côtés non horizontaux tiennent dans le prolongement de ceux du triangle de la poussée, ce qui approchera suffisamment de l'exactitude.

Hypothèse du revêtement.

30). Occupons-nous d'abord du premier cas. On sait que le plus grand moment de pression ne diffère pas du moment de la plus grande pression, quel que soit le point auquel ce moment se rapporte. Or, relativement au point A , le bras de levier de la plus grande pression est (g)

$$AC = \frac{(h-h')(h+\frac{1}{2}h')}{3h \cos \alpha};$$

figure 3.

mais en représentant par x l'épaisseur AF du revêtement à la base et aboutant du point F la perpendiculaire FI sur AB , on a

$$AI = x \sin \alpha;$$

de plus la différence de ces deux quantités est le bras de levier par rapport au point F ; donc si l'on reprend l'expression (d),

$$\frac{1}{2} \delta h (h-h') x^2 \cos \alpha$$

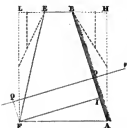
de la plus grande pression et que l'on désigne par m le moment relatif à ce point F , on aura

$$m = \frac{1}{2} \delta x^2 \left[\frac{1}{2} (h-h')^2 (h+\frac{1}{2}h') - h(h-h') x \sin \alpha \cos \alpha \right]. \dots (9)$$

D'un autre côté, soient ϵ l'angle EFL du talus extérieur EF avec la verticale, n le rapport de la densité δ des terres à la densité δ' de la maçonnerie et m' le moment du revêtement $ABEF$ par rapport au même point F ; il est clair que le moment du rectangle $AFLH$ sera $\frac{1}{2} \delta' H x^2$, tandis que ceux des triangles EFL , ABH seront respectivement $\frac{1}{2} \delta' H^3 \tan^2 \epsilon$ et $\frac{1}{2} \delta' H^3 \tan^2 \alpha (x - \frac{1}{2} H \tan \alpha)$, lesquels retranchés du premier donneront

$$m' = \frac{1}{2} \delta' H \left[x^2 - H x \tan^2 \alpha + \frac{1}{3} H^2 (\tan^2 \alpha - \tan^2 \epsilon) \right]. \dots (10)$$

Maintenant, la condition de l'équilibre entre la poussée des terres et la résistance du revêtement, consiste dans l'équation, $m = m'$, c'est-à-dire,



$$\frac{x^2}{H^2} - \tan^2 \lambda \left[1 - nr^2 \frac{h(h-h') \cos^2 \lambda}{H^2} \right] \frac{x}{H} - \frac{1}{3} nr^2 \frac{(h-h')^2 (h + \frac{1}{2} h')}{H^3} + \dots$$

$$\frac{1}{3} (\tan^2 \lambda - \tan^2 \epsilon) = 0;$$

soient donc

$$A = \frac{1}{3} \tan^2 \lambda \left[1 - nr^2 \frac{h(h-h') \cos^2 \lambda}{H^2} \right], B = \frac{1}{3} nr^2 \frac{(h-h')^2 (h + \frac{1}{2} h')}{H^3}, C =$$

$$\frac{1}{3} (\tan^2 \lambda - \tan^2 \epsilon) \dots \dots \dots (L)$$

il viendra

$$x = H(A + \sqrt{A^2 + B - C}), \dots \dots (m)$$

le signe + du radical convenant seul à la question, comme on le voit par la supposition de $\lambda = 0$, et l'autre signe ne se rapportant qu'à des considérations abstraites d'équilibre.

Ainsi, en général et en égard tant à la cohésion qu'au frottement des terres, on obtiendrait l'épaisseur d'un revêtement, en calculant trois termes assez simples et en extrayant une racine carrée, à quoi les tables trigonométriques ne seraient même pas nécessaires, si les angles λ et ϵ étaient donnés par leurs tangentes, c'est-à-dire, par les rapports des bases des talus à leurs hauteurs; car $\cos^2 \lambda = \frac{1}{1 + \tan^2 \lambda}$ et la valeur de r résulte immédiatement d'une construction qui se réduit à diviser en deux parties égales l'angle entre le talus naturel des terres sans cohésion et le parement intérieur du revêtement.

Lorsque le parement intérieur est vertical on a $\lambda = 0$, $h' = h$, $r = \tan^2 \frac{1}{2} \varphi$ et simplement.

$$x = H \sqrt{\left[\frac{1}{3} \frac{n \tan^2 \frac{1}{2} \varphi (h-h')^2 (h + \frac{1}{2} h')}{H^3} + \frac{1}{3} \tan^2 \epsilon \right]} \dots (n).$$

Comme la résistance produite par la cohésion des terres est sujette à trop d'accidents pour qu'il soit prudent de s'y fier dans la pratique et que d'ailleurs elle devient nulle dans le cas des revêtements remblayés nouvellement, tant que les terres aient été damées, il sera convenable de faire abstraction de cette force; alors on aura $h' = 0$, $h'_1 = 0$ et les formules

(m) et (n) deviendront

$$x = H \left\{ \frac{1}{3} \tan^2 \lambda \left(1 - nr^2 \frac{h}{H} \cos^2 \lambda \right) + \sqrt{\left[\frac{1}{3} \tan^2 \lambda \left(1 - nr^2 \frac{h}{H} \cos^2 \lambda \right) + \frac{1}{3} nr^2 \frac{h^3}{H^3} - \frac{1}{3} (\tan^2 \lambda - \tan^2 \epsilon) \right]} \right\} \dots (o)$$

$$x = H \sqrt{\frac{1}{3} \left(n \tan^2 \frac{1}{2} \varphi \frac{h^3}{H^3} + \tan^2 \epsilon \right)} \dots (p)$$

et, de plus on suppose que le parement extérieur soit vertical de même que l'intérieur, ou qu'on ait encore $\epsilon = 0$, la dernière

formule se réduira à

$$x = h \tan \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{H}\right)} \dots \dots (q)$$

Celles sont les formules propres à l'hypothèse du renversement; or, le mur est susceptible non seulement de tourner autour de l'arête extérieure de sa base, mais encore de glisser sur cette même base.

De l'hypothèse du glissement.

31). Quant à l'hypothèse du glissement, l'observation et le calcul s'accordent à l'exclusion des limites ordinaires de la pratique; c'est pourquoi nous nous en tiendrons à la seule hypothèse de la rotation.

Détermination du moment du
stabilité des revêtements.

32). Les formules théoriques (o), (p) et (q) fondées sur la considération de l'équilibre strict entre la poussée des terres et la résistance opposée du mur qui doit les soutenir, ne donneraient que des épaisseurs tout-insuffisantes dans l'exécution, malgré qu'on ait négligé le frottement et l'adhérence des molécules terreuses le long du parement intérieur et la cohésion de ces mêmes molécules; car d'abord les deux premières forces sont de peu de valeur et la cohésion des molécules est effectivement nulle, puisque pour construire un revêtement on enlève les terres sur toute sa hauteur et jusqu'à un talus sous lequel elles se soutiennent d'elles-mêmes, c'est-à-dire, plus incliné que celui de la plus grande pression, après quoi l'on remblaye avec des terres rapportées et qui ont perdu leur cohésion; en second lieu l'équilibre pourrait être rompu et le revêtement renversé, au moindre surcroît occasionné dans la poussée des terres, soit par la présence d'un fardeau posé à la surface, soit par quelque autre cause accidentelle, comme l'humidité qui change le poids des terres et leur frottement, ou la pluie qui les délaie et les fait agir à la manière des fluides, ou la gelée qui accroît leur volume et par conséquent leur pression etc. Il faut donc de toute nécessité mettre la résistance du mur au-dessus de l'équilibre, en augmentant les épaisseurs déterminées par la théorie, avant de les employer dans la pratique et c'est cette augmentation qu'il s'agit d'assigner.

Pour cela, les Auteurs, notamment Bolidor et Coulomb ont usé d'un expédient qui paraît naturel;

ils réglent l'augmentation de la résistance nécessaire à l'équilibre, d'après cette base que le surcroît soit dans un certain rapport avec la poutée même et ce rapport se détermine par l'expérience, comme on l'expliquera bientôt. De cette manière le moment du revêtement excèdera celui de la poutée d'une partie proportionnelle à ce dernier, et qu'on peut appeler le moment de stabilité du revêtement.

Formules pratiques.

33). En conséquence, on égalera le moment m' du revêtement, non pas, comme on l'a fait d'abord, au moment m de la poutée, mais au produit $n m$ de ce moment multiplié par un coefficient constant n , ce qui reviendra évidemment à écrire $n m$ au lieu de m , dans l'équation (m) et dans celles qui en dérivent, de sorte que les formules (Q), (P), (Q) deviendront

$$x = H \left\{ \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \left(1 - n n r^2 \frac{h^2}{H^2} \cos^2 \alpha \right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2} \tan^2 \alpha \left(1 - n n r^2 \frac{h^2}{H^2} \cos^2 \alpha \right) + \frac{1}{3} n n r^2 \frac{h^3}{H^3} - \frac{1}{3} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \epsilon) \right]} \right\} \dots (Q)$$

$$x = H \sqrt{\left[\frac{1}{3} n n \tan^2 \frac{1}{2} \varphi \frac{h^3}{H^3} + \frac{1}{3} \tan^2 \epsilon \right]} \dots (P)$$

$$x = h \tan^2 \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\left(\frac{n n}{3} \cdot \frac{h}{H} \right)} \dots \dots \dots (Q)$$

Détermination du Coefficient
de Stabilité.

34). Le coefficient n se déterminera par l'application de ces formules à des revêtements d'une solidité à toute épreuve et constatée par l'expérience. Or tous les revêtements ne sont pas uniquement destinés, comme les murs ordinaires de terrasse, à soutenir la poutée des terres : on fortification, les charpentes doivent résister non seulement à cette poutée, mais encore aux effets destructeurs de l'artillerie et les contre-charpentes doivent en outre être à l'épreuve des commotions souterraines, produites par le jeu des mines ; il convient donc de distinguer le cas des revêtements de fortification, qu'il faut pourvoir d'un excès de résistance, d'après des considérations militaires et celui des murs ordinaires de soutènement.

Dans le premier cas, les meilleurs termes de comparaison qu'on puisse choisir sont sans contredit, les revêtements construits par Vauban, lesquels ont été éprouvés dans les sièges et ont résisté depuis un siècle à l'action des terres sous l'influence de toutes les causes accidentelles qui peuvent la modifier. Or, suivant la règle connue des Ingénieurs, sous la dénomination de profil de Vauban, on a

$$x = 1,624 + 0,2. H \dots \dots (4)$$

Mais ce profil suppose le parement intérieur vertical et le talus extérieur au cinquième ; il faut donc employer la formule (P), en y faisant $\tan^2 \epsilon = 0,2$, ce qui donnera

$$x = H \sqrt{\left[\frac{1}{3} n \tan^2 \frac{1}{2} \varphi \frac{h^3}{H^3} + 0,0133 \right]} \dots (2)$$

que l'on égale les deux valeurs de x , il résultera de l'équation,

$$n = \frac{3}{\tan^2 \frac{1}{2} \varphi} \frac{H \left[(1,624 + 0,2.H) - 0,0133.H^2 \right]}{h^3} \dots (3)$$

Soient maintenant $\varphi = 45^\circ$, $n = \frac{2}{3}$, termes moyens déjà adoptés du tome de Vauban (science des Ingénieurs, page 16), il viendra

$$n = 26,228.H \frac{(1,624 + 0,2.H)^2 - 0,0133.H^2}{h^3} \dots (4)$$

C'est, dans le profil de Vauban, l'expression du rapport entre le moment du revêtement et le moment de la poutre des terres.

Appliquons cette expression aux charpés: la hauteur moyenne du plus grand nombre est $10^m = H$ et comme on peut supposer moyennement $h = H + 1^m$, on aura, $n = 1,79 = 1 + \frac{4}{5}$, à un centième près; d'où il suit que dans la plupart des charpés de Vauban, le moment de stabilité est égal à $\frac{4}{5}$ du moment de la poutre des terres. Il paraît convenable de s'en tenir à ce résultat d'expérience et, relativement aux charpés, d'attribuer au coefficient n , la valeur 1,8 avec d'autant plus de raison que les épaisseurs qui s'en déduisent diffèrent peu de celles qu'on obtient, dans les mêmes circonstances, par la règle pratique de l'ormontaigne (Magniel, page 83).

Il est à observer néanmoins que si parmi les charpés exécutés selon le profil de Vauban, il s'en trouvait en maçonneries et tores de moyennes qualités, qui eussent 15' de hauteur, il en résulterait $n = 1,67$, c'est-à-dire, un moment de stabilité, égal à environ la moitié du moment de la poutre; alors il suffirait de prendre $n = 1,5$ et les revêtements construits d'après cette détermination auraient la même stabilité que les charpés de Vauban, sous 15' de hauteur.

En général, le profil donne aux revêtements un moment de stabilité d'autant moindre que leur hauteur est plus grande, on voit que leur résistance ne se trouve pas proportionnée à la force qui tend à les renverser et c'est pour cette raison que nous avons considéré la hauteur moyenne de 10 mètres.

Le défaut, qui à la vérité est en partie corrigé par la

présence des contre-forts dont les dimensions croissent avec la hauteur du mur, provient de l'invariabilité de l'épaisseur au cordon, laquelle épaisseur est constamment de 5^m, quelle que soit la hauteur, ce dont on ne voit d'autre raison que celle de la résistance à la pénétration des boulets. Un autre défaut qu'on reproche au profil de Vauban, c'est que le talus extérieur, fixé au cinquième, est trop fort et c'est afin d'éviter les inconvénients que l'on craignoit que les Ingénieurs ont réduit ce talus au sixième.

Actuellement, si l'on applique l'expression (b) aux dernières contre-chaînes de Vauban, pour lesquelles on a $h=H$, $x=0$, $7745+0,2 \cdot H$ et qu'on prenne successivement, $H=6^m$, $H=7^m$ on obtient $n=3,79$; $n=3,02$; donc puisque $n=1,79$ procure une stabilité suffisante, il s'ensuit, relativement à ces contre-chaînes, que le moment de stabilité est plus de trois fois et demie trop grand, sous la hauteur de 6^m, et plus de deux fois et demie, sous la hauteur de 7^m, ce qui est contraire à l'économie (*).

Quant aux revêtements ordinaires ou des terribles, murs en aile, ou des quais, chaussées &c. qui outre la poussée des terres ont encore à supporter le poids des voitures et les secousses qu'elles occasionnent, nous nous en rapporterons à Pélissier qui ne porte le moment de stabilité qu'à $\frac{1}{4}$ et même à $\frac{1}{6}$ du moment de la poussée (Science des Ingénieurs, pages 47, 49, 50, 51). Il est vrai que par sa théorie fondée sur des hypothèses arbitraires, cet Auteur trouvant des épaisseurs déjà très-fortes dans le cas de l'équilibre, n'avait pas besoin d'un grand moment de stabilité pour se rapprocher des usages de son temps; néanmoins on admettant le rapport $\frac{1}{4}$ on s'écartera alors peu de la règle suivie par les Constructeurs (Rondelet, art de bâtir) et vu les circonstances négligées dans le calcul, cet excès de $\frac{1}{2}$ au-dessus de l'équilibre paraît devoir suffire pour mettre un revêtement ordinaire à l'abri de l'influence des causes accidentelles de destruction.

En damant les terres à mesure que le remblai s'effectue, on leur procure une cohésion artificielle, dont on tiendrait compte, si on le voulait, au moyen des formules (m) et (n), dans lesquelles on substituerait m et n au lieu de x . Alors il

(*) La discussion précédente est à quelques changements près, tirée du Mémoire (N^o 4, page 176).

faudrait déterminer les quantités H_1, H_2 , par des expériences immédiates sur les terres damées; mais comme en général les valeurs de ces quantités sont peu considérables et que d'ailleurs elles dépendraient du plus ou du moins de soin apporté à l'opération, on fera bien de négliger absolument la cohésion.

C'est pour concilier autant que les divers circonstances le permettent, l'économie et la solidité sous lesquelles il ne peut exister de bonne construction, non seulement on fera constamment H_1 ou H_2 nul, mais encore on admettra dans les deux cas qui ont été distingués les valeurs respectives;

$$n = 1, 80; \quad n = 1, 25 \dots (R)$$

des considérations particulières fixant dans le premier cas, le talus extérieur au sixième de la hauteur.

35). Nous avons regardé la base des murs de revêtement comme incompressible et inébranlable; cependant il n'en est pas ainsi, à moins que cette base ne soit une masse de rochers, et même les murs fondés sur pilotis peuvent être renversés, si les pilotis n'ayant pas alors pénétré dans le terrain solide, cèdent à la poussée des terres et s'inclinent en avant. Il est bien rare que les revêtements viennent à manquer par un défaut d'épaisseur; mais il n'est que trop commun de les voir périr soit parce que la fondation n'a pas été construite alors solidement, soit parce qu'on n'a pas donné un empiètement suffisant à cette fondation sur laquelle se reporte tout l'effort de la poussée. C'est donc une question très-importante que de déterminer les dimensions qu'il convient de donner aux fondations pour en assurer la stabilité (*).

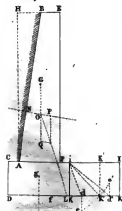
36). Le massif CDKi de la fondation, auquel on a coutume de donner la forme d'un parallépipède rectangle, se trouve soumis à l'action de trois forces; savoir, son propre poids, le poids du revêtement et la poussée des terres: on voit de cette action, il tend à glisser sur sa base et on même tend à tourner autour d'un axe parallèle aux arêtes antérieures et intérieures de cette base. Le premier mouvement peut et doit toujours être empêché, soit par quelque moyen artificiel, soit simplement par la résistance des terres contiguës au parement extérieur des fondations. La solution de la question se déduira donc uniquement de la considération du mouvement de rotation.

(*) S'analyse de cette question se trouve dans le *Mémoire* (N^o II, page 135).

Examen de la supposition que la base du mur est inébranlable.

Détermination de la largeur des fondations.

figure 4.



Si le fond sur lequel on bâtit était absolument incompressible, il suffirait que la résultante des trois forces passât dans l'intérieur de la base du massif et cette condition se trouverait toujours remplie d'elle-même, parce que le moment du poids du revêtement par rapport au point F , ayant été rendu supérieur à celui de la poussée des terres, la résultante de ces deux forces passe en deçà du point F , par rapport au point A , et comme elle doit encore se composer avec le poids du massif, la direction de la résultante finale se rapprochera encore davantage de la verticale, c'est-à-dire, fera un plus grand angle avec l'horizon.

Mais s'il arrive que le fond soit compressible et c'est le cas le plus fréquent, il faudra, en supposant la compressibilité uniforme dans toute l'étendue des fondations, que la résultante passe par le centre de figure de la base. Or, à cause de la forme du massif, la direction de son poids passe déjà par le centre de figure de la base; tout se réduit donc à ce que la résultante du poids du revêtement et de la poussée des terres, soit dirigée à ce même centre.

Cela posé, la profondeur des fondations, ou tant qu'elle dépend des circonstances locales est une quantité donnée et l'on a la position DK de la base du massif; on outre le centre de gravité G du revêtement peut se construire graphiquement et la quantité représentative de son poids est facile à calculer; enfin, puisque la cohésion est supposée nulle, le point d'application N de la poussée s'obtiendra par la formule (A) dans laquelle on fera $h=0$. On a le poids du revêtement et la poussée des terres sont deux forces connues de grandeur et de position. Soient O le point de concours de ces deux forces et OL la direction de leur résultante; cette direction rencontrera la ligne DK en un point I , et il est clair que si l'on porte DI ou LK , la distance DK sera la largeur des fondations.

Il est aisé de traduire la question en analyse: il n'y a qu'à substituer les valeurs des données, dans l'équation qui exprime l'égalité entre les moments du revêtement et de la poussée, par rapport au point I , milieu de la longueur cherchée DK . L'équation n'est que du premier degré.

Les retraites extérieures ainsi déterminées excèdent toujours celles qui sont en usage, et s'il n'arrive pas plus d'accidents

aux revêtements, cela doit être attribué soit à la présence des contre-forts, soit à l'attention qu'on a de pénétrer jusqu'au terrain ferme, soit enfin à ce que, à force d'ard et de dépense, on rend le fond comme incompréhensible.

On devra donc comparer la dépense qu'il faudrait faire pour donner au terrain le degré d'incompréhensibilité nécessaire, avec celle qu'exigeraient des fondations construites d'après les principes précédents, ce qui déterminera le choix entre les deux procédés, sur le dernier desquels il est encore à observer que l'épaisseur CD est proportionnée à la largeur DK , sans quoi, à cause de l'inégale compréhensibilité dans les différents points, le massif pourrait s'ouvrir en-dessous en s'affaissant au milieu et entraîner ainsi la chute du revêtement.

Examen du rapport que le mur est à une seule pièce.

37). Non seulement nous avons regardé la base du revêtement comme inébranlable, mais encore nous avons supposé que ce revêtement lui-même était une seule masse continue, dont les parties ne se sépareraient point dans le mouvement qu'il prendrait en cédant à la poussée des terres; il est nécessaire d'examiner aussi cette hypothèse.

D'abord, la partie inférieure du mur est la seule qui fasse difficulté; car suivant l'expérience, la partie supérieure tombe tout d'une pièce, les mêmes que le mur est construit en pierres sèches. Magnol rapporte, page 97 de son traité, que des murs de 1^m 5 de hauteur au-dessus du sol et de 0^m 5 d'épaisseur, bâtis en briques, non seulement avec du mortier de trais, qui a la propriété de sécher promptement, mais encore avec du mortier ordinaire et même sans aucun mortier, ne se sont rompus que par le bas, et, ce qui est bien remarquable, dans la direction du talus d'éboulement.

Il ajoute qu'un mur de 20^p de hauteur (lequel devait avoir au moins 4^p d'épaisseur) et dont on avait fait consolider la maçonnerie, s'est brisé au niveau du sol, pareillement dans la direction du talus d'éboulement ou à peu près suivant la diagonale du carré construit sur l'épaisseur; mais il fait observer que les terres vierges avaient été déblayées à l'extérieur du mur, tandis qu'à l'intérieur elles étaient relâchées à leur sol naturel. Quant à la partie inférieure, si le mur a une certaine épaisseur et si les mortiers n'ont pas eu le temps de prendre corps ni de lier suffisamment entre elles

figure 5.



toutes les parties de la maçonnerie, il est vraisemblable que dans le mouvement de rotation du mur $ABFF$ autour de l'axe extérieure F de la bafe, il restera sur cette bafe, un prisme AFQ , qui ne sera point soulevé avec la partie supérieure du mur. La détermination de ce prisme appartiendrait à la théorie de la résistance des supports en maçonnerie. Mais, outre qu'on ne connaît pas exactement la valeur de la cohésion des maçonneries, laquelle est sujette à varier par la nature des matériaux, la manière de construire, le temps écoulé depuis l'exécution du travail, la saison et le climat même dans lesquels il est exécuté, cette théorie ne convient pas bien aux murs de revêtement parce qu'on y regarde la pression des terres comme une force simple et, en regard toutefois au changement de bras de levier, comme appliquée au sommet du revêtement, tandis qu'elle est au contraire répandue sur tout les points du parement intérieur, de sorte qu'à l'instant de la rupture de l'équilibre, le seul qu'il faille considérer, la pression exercée contre la face AQR est une force qui ne doit pas être omise dans la détermination du prisme. À quoi l'on peut ajouter que cette pression ainsi disséminée produit entre les parties du mur un frottement qui s'oppose à leur disjonction; ce qui explique comment le mur se renverse en masse, quoiqu'il soit bâti sur matière.

Au reste comme on établissant les formules définitives nous avons fait abstraction de la cohésion des terres et que nous avons donné au revêtement un moment de stabilité assez fort, il ne sera pas à craindre que la poutière l'emporte dans les premiers moments sur la résistance des revêtements; à plus forte raison, si l'on donne des terres du remblai à mesure qu'on l'effectue derrière le revêtement ou si on laisse à la maçonnerie le temps d'acquiescer quelque degré de cohésion; dès-lors, le moment de stabilité augmentera, en approchant de son terme, à proportion que les terres tacheront et que le mur prendra plus de confiance.

Concluons de là que sur-tout avec les précautions dont on vient de parler, l'hypothèse en question est généralement admissible et qu'il n'y a aucune diminution à faire au volume du revêtement, fut-il construit en pierres sèches.

Les expériences citées prouvent aussi qu'un revêtement

Des contre-forts.

ne cède jamais qu'en tournant autour de l'arête extérieure de la balle et non en glissant sur cette balle, ce qui peut aussi être démontré par le calcul.

38. Dans la fortification principalement, on construit les revêtements avec des contre-forts intérieurs, distribués sur toute leur longueur et qui ajoutent beaucoup à leur solidité. Or la liaison de la maçonnerie de ces mâtifs avec celle du mur ne paraît pas pouvoir être jamais assez forte, vu les dimensions qu'on a coutume de leur donner, pour permettre qu'ils se meuvent tout entiers avec lui dans son mouvement de rotation autour de l'arête extérieure de la balle commune; on ne saurait donc évaluer avec un peu d'exactitude l'effet produit par ces contre-forts, qu'en faisant entrer en considération la force de la cohésion qui s'oppose à la séparation des parties du système, recherche sujette aux mêmes difficultés que la précédente, et qui fait partie de la théorie des supports en maçonnerie.

En fortification, on déterminera tout simplement les épaisseurs des revêtements d'charge, par les formules établies; les contre-forts ajoutés procureront un surcroît de solidité, très-utile relativement aux considérations militaires dont nous avons parlé et amènera encore l'avantage important de diminuer l'étendue des brèches. La figure, les dimensions et la disposition de ces contre-forts seront d'ailleurs conformes aux règles prescrites par Vauban. Ainsi, l'écartement sera de 18^{pi} de milieu en milieu, ou de 15^{pi} si le rempart doit être surchargé; la hauteur d'charge étant supposée de 10^{pi}, ils auront 6^{pi} de longueur, autant de largeur, à la racine, et les deux tiers à la queue, proportion constante; ensuite, pour chaque augmentation de 10^{pi} dans la hauteur d'charge, cette longueur augmentera de 1^{pi} et la largeur à la racine de 1^{pi} seulement. L'excès de largeur à la racine sur la largeur à la queue est motivé par une plus grande adhérence du contre-fort avec le revêtement.

Des revêtements en décharge.

39. On a imaginé un genre de construction de revêtement qui mérite d'être remarqué: on adosse au mur, du côté du toisel, un ou plusieurs rangs d'arcades ou d'arcueils auxquels les contre-forts servent de pieds-droits; c'est ce qu'on appelle *voûtes en décharge*. Les larges retraites que forment

ces rangs de voûtes portent une partie des terres dont ils interrompent ainsi la poussée et ces arceaux augmentent le bras de levier de la résistance dans un plus grand rapport que la masse de maçonnerie; de sorte que cette disposition qu'on peut varier d'une infinité de manières se prête à une grande économie de matériaux. D'ailleurs ces voûtes, au moyen d'un mur de maçonnerie, opposé aux terres, deviennent des fortifications ou des casernes dont on tire un parti très-avantageux dans une ville de guerre. (Voyez sur ce sujet, le traité de Maignel).

Note, c.

Sur le N^o. 1.

1^o Les diverses solutions publiées ou inédites, antérieures à celle de Coulomb, ont été recueillies par M^o. Maignel et insérées dans son traité qui a paru en 1808. Tous ceux qu'on examine ces solutions, on s'aperçoit qu'on y a négligé la plupart des circonstances physiques, ou que si l'on y a introduit le frottement, c'est d'une manière tout-à-fait inexacte, et qu'en général elles sont fondées sur des hypothèses arbitraires, quelquefois contradictoires, ou sur des décompositions de forces, mal entendues. (Voyez à ce sujet, recherches sur la poussée des terres N^o. par Prony, N^o. 19 et 38).

2^o Coulomb, en analysant le cas où le plan AB est vertical, le seul dont il se soit occupé, a donné comme résultat utile dans l'excavation des terres, la relation entre leur cohésion, leur frottement et la hauteur sous laquelle elles peuvent être fouillées à pic sans qu'elles s'éboulent; il était facile d'inférer que réciproquement la cohésion pouvait être déterminée par le moyen de cette hauteur ainsi que du frottement, et de l'exprimer en fonction de ces deux quantités.

M^o. de Prony, dans sa mécanique philosophique, a

présente très-simplement l'analyse de ce même cas: pour y parvenir, il a introduit dans le calcul l'expression de la cohésion déterminée comme on vient de le dire, et sur-tout il a indiqué, suivant l'usage, le rapport du frottement à la pression, par la tangente de ce qu'on appelle l'angle du frottement & qui n'est autre chose ici que l'angle du talus que prennent naturellement les terres, lorsque leur cohésion est détruite; ce qui l'a conduit à une expression très-remarquable de l'angle du prisme de la plus grande poutée.

M. Mayniel a toute dans son ouvrage la solution du cas général, où le plan AB a une situation quelconque, & où la direction de la poutée n'est certainement plus horizontale, quoi qu'en aient dit M.^{rs} de Prony & Navier (*Recherches sur la poutée des terres*, par Prony, N.^o 22; *Traité de la Construction des ponts*, par Ganthoy, tome 1^{re} page 383, note de Navier); mais il n'a pas amené l'expression de l'angle du prisme de la plus grande poutée ou de la poutée, sous la forme analogue à celle qu'on avait trouvée, quand le plan AB était vertical; & il s'est d'ailleurs mépris dans l'emploi qu'il a fait de cette expression pour évaluer le moment de la poutée.

Cet défaut a été corrigé dans le N.^o 4 du *Mémorial de l'Officier du Génie*, où l'on a généralisé aussi le résultat de Coulomb, concernant l'excavation des terres.

Malgré ce perfectionnement, il manquait encore quelque chose à la théorie de la poutée des terres & à son application, quant à la rigueur des raisonnemens & à la simplicité des calculs: on avait formellement confondu le prisme d'éboulement & celui de la plus grande poutée, qui sont très-distincts l'un de l'autre; les transformations par lesquelles on arrivait aux formules du cas général, quoique fondées sur les théorèmes élémentaires de la trigonométrie, sont fort longues & deviennent impraticables par leur prolixité, lorsqu'on veut tenir compte du frottement & de l'adhérence sur le parement intérieur du mur, & cependant ces transformations peuvent être évitées; la hauteur à laquelle des terres coupées suivant un plan donné, peuvent se soutenir d'elles-mêmes, étant déterminée par la considération de la section de la plus grande

pression perpendiculaire à ce plan, tandis qu'il faut considérer la section de la plus grande pression parallèle à cette même section; enfin, on opposait à la résistance du mur le pignon de la plus grande pression des terres, au lieu du pignon de la plus grande moment de pression, qui pourrait différer du premier et dont l'identité avec lui, n'est pas évidente, pas même dans le cas particulier traité par Coulomb.

Nous avons tâché de donner plus de rigueur aux principes de la théorie et plus de simplicité au calcul des formules.

II. Sur les N.^{os} 3 et 6.

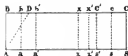
Les principes sur lesquels la théorie de la poutte des terres est fondée, exigent quelques éclaircissements.

1.^o Parmi les fluides quelconques le degré de fluidité dépend tant de la cohésion que du frottement des molécules entre elles; et comme par rapport à leur nature les fluides imparfaits participent des corps solides et des fluides proprement dits, il doit en être de même par rapport aux lois de leur équilibre.

2.^o Soit $ABCS$ le profil d'un vase rectangulaire, indéfiniment long et rempli d'un fluide imparfait, qui ait une certaine adhérence avec les parois AB, CS ; soit AD la section de la plus grande pression contre le plan AB ; le fond AS du vase pourra être mobile ou fixe, en totalité ou en partie et la hauteur AB du fluide surpassera ou non la hauteur H_1 , sous laquelle la plus grande pression devient nulle.

3.^o Si la hauteur AB n'excède pas H_1 , que le fond AS soit fixe ou mobile, il y aura simplement adhérence sur les parois AB, SC et cohésion sur les sections telles que xx . Il en sera de même, si AB surpassant H_1 , le fond est mobile, tandis que s'il est fixe, il y aura non seulement adhérence sur AB, SC et cohésion sur xx , mais encore pression et par conséquent frottement sur ces plans, frottement qui, à la vérité, augmentera avec la hauteur du fluide et variera, comme la pression elle-même, d'un point à l'autre de cette hauteur, mais dont on obtiendra évidemment la valeur en multipliant la somme des pressions

figure 6.



$$AA' = aa' = SS' = ss'.$$

sur le plan que l'on considère, par le rapport du frottement à la pression. Lorsqu'une partie $a's'$ du fond AS , aussi grande que le double de la base BD du prisme de plus grande pression, sera fixe, il y aura aussi pression et par conséquent frottement sur les plans AB , SC , &c.; mais cette pression ou ce frottement diminuera avec $a's'$.

4°. Supposons donc AB plus grand que b , et le fond AS fixe; désignons par q le poids de la masse fluide ABC ; par r la résistance absolue, provenant de la cohésion et du frottement propres de cette masse, sur la section xx , et par r' la résistance absolue, provenant de l'adhésion et du frottement sur AB ou SC : selon que r sera ou ne sera pas moindre que r' le poids q sera retenu par une force contraire, égale à $2r$ ou $2r'$ respectivement, de sorte que la pression soufflée par le fond AS sera seulement $q - 2r$ ou $q - 2r'$.

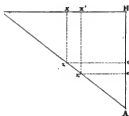
5°. Pour savoir comment cette pression se répartit sur le fond AS , supposons-le réduit à la partie $a's'$, plus grande que le double de BD et telle que Ab et $a'b'$ d'une part, Sc et sc' d'autre part, soient deux tranches égales, soutenues par la résistance r ou r' (selon que r sera moindre que r' ou r' moindre que r) appliquée suivant AB et $a'b'$, et suivant SC et $s'c'$; résistance qui entrera alors en exercice; il est clair que la pression sur le fond $a's'$, laquelle sera égale au poids de $abcs$, se répartira uniformément sur $a's'$. Si le fond avait l'étendue as , les tranches extrêmes Ab , Sc seraient encore soutenues par la résistance r sur AB et SC ; mais la résistance r' sur $a'b$ et $a'b'$, ainsi que sur sc , sc' n'entrant point en exercice, la pression sur as , toujours égale au poids de $abcs$, serait maintenant répartie uniformément sur tout as et serait moindre qu'auparavant sur une portion quelconque xx' . Or, dans ce dernier cas, rien ne serait changé, si l'on ajoutait au fond les parties Aa , Ss qu'on avait ôtés; donc ces parties ne souffrent pas de pression et la partie intermédiaire supporte une pression uniforme égale au poids de $abcs$, c'est-à-dire, égale à $q - 2r$ ou $q - 2r'$.

6°. On parvient au même résultat par la décomposition de la masse $ABCS$, en tranches élémentaires, verticales, telles que $x \ x' \ x''$. Le fond du vase venant à céder, la partie $xx'SC$, regardée pour un moment comme non pesante, ne

sera retenue qu'avec une force r' dirigée suivant SC , et conséquemment ne pourra elle-même retenir l'autre partie ABx , qu'avec une force égale r' , dirigée suivant xx ; ainsi cette partie ABx sera retenue par deux forces dirigées respectivement suivant AB et xx ; mais elle ne peut être retenue suivant xx avec une force r' , sans que, en vertu de la réaction, la partie contiguë $xxSC$ ne soit tirée suivant xx , avec une force égale r' ; d'où il suit que cette partie $xxSC$, à laquelle nous relâchons son poids, sera tirée suivant xx et retenue suivant SC avec des forces égales à r' . Il en sera des deux parties ABx' , $x'x'SC$, comme des deux ABx , $xxSC$, et, par conséquent, de la tranche élémentaire $xx'x'$, comme de la partie $xxSC$; donc en nommant dp la pression sur la base xx' , on aura $dp = dq$, et en intégrant, $p = q + A$. La constante A se déterminera d'après la considération que p soit nul quand $q = q'$, poids de la tranche extrême AB ou SC , équivalent à r ou à r' ; d'où résulte $p = q - r$ ou $p = q - r'$.

7°. Remarquons d'abord que c'est par le moyen de la force intérieure r , que la force extérieure r' , appliquée suivant SC , se transmet de proche en proche aux tranches élémentaires, et en quantité égale à r' même, si r n'est pas moindre que r' ; mais seulement à r , si r est moindre que r' . Lareille remarque dans le cas où les parois AB, SC étant inclinées, les tranches seraient parallèles à l'une de ces parois.

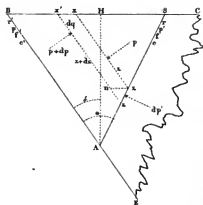
figure 7.



Que le profil du vase ait la figure d'un triangle rectangle ABH , dont le côté AH soit vertical et que l'on considère encore une tranche élémentaire, verticale, $xx'x'$; on mènera les horizontales $xo, x'o'$ et le raisonnement du N°. 6 s'appliquera à chacune des parties $BHox, BH'o'x'$ du fluide, c'est-à-dire que les deux forces dues tant à l'adhérence, qu'au frottement, sur Ho et sur Ho' , se transmettront respectivement aux prismes $Bxx, Bx'x'$, par le moyen de la force interne, supposée au moins égale à la force extérieure; d'où il suit que la tranche $xx'x'$ sera tirée suivant xx par la force relative à Ho' . Cette remarque susceptible de la même extension que la précédente est très-essentielle.

8°. Donnons, enfin au profil du vase la figure d'un triangle quelconque ABS et cherchons les pressions que le

figure 8.



fluide exercé sur les parois AB, AS, on supposant que l'adhérence et le frottement sur la dernière AS, soient les mêmes que dans le fluide.

5°. Nous répondrons d'abord la question on regardant ABS comme un solide qui éprouverait sur les plans inclinés AB, AS, les mêmes résistances que le fluide imparfait.

On pourrait décomposer le poids du prisme en deux forces faisant avec la verticale deux angles arbitraires, et chacune de celles-ci en deux nouvelles forces; la première, normale, la seconde, parallèle à l'un des plans AB, AS: l'in détermination des angles permettrait d'égaliser la composante parallèle à chaque plan avec la résistance totale suivant ce même plan; on aurait ainsi deux équations au moyen desquelles on éliminerait ces angles de la valeur de la pression cherchée. Cette méthode est très-propre à faire concevoir comment s'engendrent les pressions normales, supportées par les plans AB, AS; mais il sera plus simple de ramener le système à l'état d'un corps libre.

Désignons par q le poids du prisme; par λ et par θ les angles BAH, BAS; par p, p' les pressions normales aux plans AS, AB; par f, f' les rapports des frottements aux pressions; par c, c' la cohésion et l'adhérence sur ces plans; enfin par r, r' les résistances totales suivant ces mêmes plans, de sorte que $r = fp + c$, $r' = f'p' + c'$.

Il y aura équilibre entre les forces p, p', q, r, r' , appliquées, si l'on veut, au centre de gravité du prisme, pourvu que la somme de leurs composantes horizontales et celle de leurs composantes verticales soient nulles chacune, en particulier, ce qui donne

$$\left. \begin{aligned} p \cos \lambda - p' \cos (\theta - \lambda) + r \sin (\theta - \lambda) - r' \sin \lambda &= 0, \\ p \sin \lambda + p' \sin (\theta - \lambda) + r \cos (\theta - \lambda) + r' \cos \lambda - q &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

d'où l'on tire en mettant pour r et r' leurs valeurs,

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{q[\cos(\theta - \lambda) - f \sin(\theta - \lambda)] - c - c'(\cos \theta - f \sin \theta)}{\sin \theta + f \cos \theta + f'(\cos \theta - f \sin \theta)} \\ p' &= \frac{q(\cos \lambda - f \sin \lambda) - c' - c(\cos \theta - f \sin \theta)}{\sin \theta + f \cos \theta + f'(\cos \theta - f \sin \theta)} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

10°. Maintenant, pour avoir égard à la fluidité du prisme,

décomposent-le en tranches par des plans parallèles à AB : on verra du principe (N^o 7), chaque tranche élémentaire $xx'x''$ sera retenue dans le sens xx et tirée dans le sens contraire $x'x''$, avec des forces respectivement proportionnelles à xx , $x'x''$ et non pas à la cohésion et au frottement internes du fluide, mais à l'adhérence et au frottement sur AB .

Où, appliquant au prisme quelconque Sxx , la notation précédente et observant qu'alors le poids de l'élément $xx'x''$ est exprimé par dq ; la pression et la cohésion sur la base xx' , par dp' et dc ; les pressions sur les faces xx et $x'x''$, par p et $p+dp$; les résistances suivant ces mêmes faces, par $f'p+c'$ et $f'(p+dp)+c'+dc$; on verra que les composantes horizontales et verticales des forces appliquées à l'élément dont il s'agit seront

$$\left. \begin{array}{l} \text{horizontales} \\ + \text{ dans le} \\ \text{sens BS} \\ \text{verticales} \\ + \text{ dans le} \\ \text{sens HA} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -p \cos \alpha, + (p+dp) \cos \alpha, -dp \cos (\theta-\alpha), + (f'p+c') \sin (\theta-\alpha), + (f'(p+dp)+c'+dc) \sin \alpha, -[f'(p+dp)+c'+dc] \sin \alpha; \\ +p \sin \alpha, -(p+dp) \sin \alpha, -dp \sin (\theta-\alpha), -(f'p+c') \cos (\theta-\alpha), + (f'(p+dp)+c'+dc) \cos \alpha, +dq; \end{array}$$

on trouvera pour les conditions d'équilibre de cet élément, précisément les différentielles des équations (1) et (2), c'est-à-dire,
$$\left. \begin{array}{l} dp \cos \alpha - dp' \cos (\theta-\alpha) + (f'p+c') \sin (\theta-\alpha) - (f'(p+dp)+c'+dc) \sin \alpha = 0, \\ -dp \sin \alpha - dp' \sin (\theta-\alpha) - (f'p+c') \cos (\theta-\alpha) + (f'(p+dp)+c'+dc) \cos \alpha + dq = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$
 dont l'intégration reproduira les premières, chacune à une constante près, mais qui sera nulle, parce que $p=0$, $q=0$, $r=0$, $r'=0$ simul-
tamment, ce qui s'explique comme au N^o 6.

11. Supposons que le plan AB soit vertical ou qu'il s'agisse du prisme AHS , nous aurons $\alpha=0$, et les formules (2) deviendront

$$p = \frac{(q-c')(\cos \theta - f' \sin \theta) - c}{\sin \theta + f' \cos \theta + f'(\cos \theta - f' \sin \theta)}, \quad p' = \frac{q-c'-c(\cos \theta - f' \sin \theta)}{\sin \theta + f' \cos \theta + f'(\cos \theta - f' \sin \theta)} \quad (3)$$

12. Si la cohésion, l'adhérence et les frottements étaient nuls ou que la fluidité fût parfaite, les expressions (2) et (3), à cause de $BS=AB \frac{\sin \theta}{\cos (\theta-\alpha)} = AS \frac{\sin \theta}{\cos \alpha}$ et de $HS=AS \sin \theta = AH \tan \theta$, d'où $q = \frac{1}{2} AH \cdot AB \frac{\sin \theta}{\cos (\theta-\alpha)} = \frac{1}{2} AH \cdot AS \frac{\sin \theta}{\cos \alpha}$ et $q = \frac{1}{2} AH \cdot AS \sin \theta =$

$\frac{1}{2} AH^2 \tan \theta$, se réduiraient respectivement à

$$p = AB \cdot \frac{1}{2} AH, \quad \text{et} \quad p' = AS \cdot \frac{1}{2} AH, \\ p' = AS \cdot \frac{1}{2} AH; \quad p' = AH \cdot \frac{1}{2} AH.$$

13. On tire de là les conclusions; 1.^o quoique le mode de répartition de la pression sur les plans AB, AS dépende de la nature du fluide; cependant, pour les fluides imparfaits, la grandeur absolue de cette pression est indépendante

du degré de fluidité et elle est la même que si, toutes choses d'ailleurs égales, la masse était solide; 2° pour les fluides proprement dits, la grandeur absolue de la pression sur le plan AB ou AS , ne dépend, toutes choses d'ailleurs égales, que de l'étendue de ce plan et de la distance de son centre de gravité au niveau supérieur; 3° si les résistances sur AB et AS sont nulles, il faudra toujours, quelle que soit la fluidité du prisme ABS , fût-elle parfaite, la même force perpendiculaire à AB , pour soutenir ce prisme sur le plan incliné AS ou réciproquement; et c'est ce qu'on trouve directement; car l'équation d'équilibre est $p \sin \theta = q \cos(\theta - \alpha)$; or, Δ exprimant la densité du fluide,

$$q = \frac{1}{2} \Delta \overline{AH}^2 \frac{\sin \theta}{\cos \alpha \cos(\theta - \alpha)}; \text{ donc } p = \frac{1}{2} \Delta \overline{AH} \frac{\overline{AH}}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \Delta \overline{AH} \cdot \overline{AB}.$$

figure 9.



14°. Nous pouvons actuellement déterminer en général la nature de la courbe AS : nous avons $dc = y' ds$, $dc' = y' dz$, $dq = \Delta \cos \alpha \cdot x dx$ et le triangle différentiel pxz donne $\cos(\theta - \alpha) = \frac{dx \cos \alpha}{ds}$; d'où $\sin(\theta - \alpha) = \frac{dz - dx \sin \alpha}{ds}$; on substituant ces valeurs dans les équations (1) et éliminant $\frac{dp'}{ds}$ nous trouverions l'expression de dp . Mais nous y parviendrons bien plus simplement en substituant dans la différentielle de l'expression (2) de p , prise par rapport à c, c', q , les valeurs précédentes de $dc, dc', \sin(\theta - \alpha), \cos(\theta - \alpha)$ et celles-ci

$$\sin \theta = \frac{dx \cos \alpha}{ds}, \cos \theta = \frac{dz - dx \sin \alpha}{ds}, ds^2 = dx^2 + dz^2 - 2 dx dz \sin \alpha,$$

données encore par le triangle différentiel pxz . Il y a plus, c'est que comme on a entre les coordonnées obliques x, z et les coordonnées rectangulaires u, v , les relations, $u = x - z \sin \alpha$, $v = z \cos \alpha$; d'où $du = dx - dz \sin \alpha$, $dv = dz \cos \alpha$ et $dx = \frac{du \cos \alpha + dv \sin \alpha}{\cos \alpha}$, $dz = \frac{dv}{\cos \alpha}$; ce qui produit $dc = y' ds$, $dc' = \frac{y' dv}{\cos \alpha}$,

$$dq = \frac{\Delta v (du \cos \alpha + dv \sin \alpha)}{\cos \alpha}, \sin(\theta - \alpha) = \frac{du}{ds}, \cos(\theta - \alpha) = \frac{dv}{ds}, \sin \theta =$$

$$\frac{du \cos \alpha + dv \sin \alpha}{ds}, \cos \theta = \frac{dv \cos \alpha - du \sin \alpha}{ds}, ds^2 = du^2 + dv^2,$$

on passera immédiatement des unes aux autres coordonnées, par la substitution de ces dernières valeurs, et si remettant x, z au lieu de u, v , on fait dx négatif, afin de changer le sens des x positives et qu'enfin on pose $dz = m dx$, on obtiendra

$$P = \int \frac{\gamma + \delta f z + [\gamma'(f + \tan \alpha) + \delta z(1 - f \tan \alpha)]m + [\gamma + \gamma' - (\gamma'f + \delta z) \tan \alpha]m^2}{\{1 - ff' - (f + f') \tan \alpha - [(1 - ff') \tan \alpha + f + f']m\} \cos \alpha} dx \dots (b)$$

expression dans laquelle on pourra supposer l'origine en un point quelconque de BS et particulièrement en H.

Représentons par V le coefficient de dx , la condition du maximum de p sera $\delta f V dx = 0$; mais on a $\delta f V dx = f \delta(V dx)$ $f V \delta dx + f dx \delta V = V \delta x + f(dx \delta V - dV \delta x)$, on intégrant par parties; d'ailleurs, si l'on fait, pour abréger, $L = \frac{dV}{dx}$, $M = \frac{dV}{dm}$, il viendra $dV = L dx + M dm$, $\delta V = L \delta x + M \delta m$, et parce que $\delta m = \frac{d\delta z - m d\delta x}{dx}$, on aura $\delta f V dx = \dots \dots \dots$

$$V \delta x + f(L dx \delta z - L \delta x dx - M dm \delta x + M d\delta z - M m d\delta x);$$

ainsi, en intégrant encore par parties, on obtiendra pour la variation définitive,

$$(V - Mm) \delta x + M \delta z + f(L dx - dM) \delta z - f(L \delta x - m dM) \delta x = 0 \dots (c).$$

Or, 1°. les termes affectés du signe f donnent l'un comme l'autre

$$L dx - dM = 0;$$

c'est donc l'équation de la courbe cherchée: substituant au lieu de L sa valeur tirée de $dV = L dx + M dm$, on trouvera l'équation équivalente,

$$V - Mm = C \dots (d)$$

2°. la partie dérivée du signe f fournit l'équation

$$(V - Mm) \delta x + M \delta z = 0 \dots (d)$$

soient x', z' , et x'', z'' les coordonnées des deux points extrêmes S et A de la courbe; comme le premier est variable sur l'axe HC des x et que le second est fixe sur l'axe HA des z , on aura $x'' = 0$, $\delta x'' = 0$; $x' = 0$, $z' = AH = h$, $\delta x' = 0$, $\delta z' = 0$, et par conséquent

$$V' - M' m' = 0 \dots (5)$$

c'est-à-dire, ce que devient l'équation (d) quand on y fait $C = 0$ et $x = x' = 0$, $m = m' = \frac{dz'}{dx'}$; d'où l'on conclut immédiatement que dans l'équation (d) la constante C demeure nulle.

Cela posé, si l'on représente par P, Q, R et par A, B les coefficients de m , dans le numérateur et dans le dénominateur de V , abstraction faite du facteur constant $\cos \alpha$, qui s'efface, on verra facilement que les équations (4) et (5) reviennent aux deux

$$(AR + BQ)m^2 + 2BPm - AP = 0 \dots (6)$$

$$(AR' + BQ')m^2 + 2\gamma Bm' - \gamma A = 0 \dots (7)$$

dont les développements, où l'on écrira t pour $\tan \alpha$, seront

$$\{f(f'-f'')(f'+\Delta f'z)(1+t^2)-(f'+\Delta f'z)\{ff''-(f+f')t+1\}\}m^{-1}z(f'+\Delta f'z)(1-ff')t+f+f' m+(f'+\Delta f'z)[1-ff''-(f+f')t] \dots (e)$$

$$\{f[1-ff''-(f+f')t]+f'(1+f')(1+t^2)\}m^2+z\{f[1-ff']t+f+f'\}m-f[1-ff''-(f+f')t] = \dots (f)$$

15. Il s'agit d'intégrer l'équation (e); mais comme sa généralité rend ses coefficients fort compliqués, nous les restreindrions d'abord à l'hypothèse $\lambda=0$, qui simplifiera les calculs sans en changer le procédé. Alors elle deviendra

$$[f'z-f'(ff''-f'f)+(f+f')\Delta z]m^2+z(f+f')(f+\Delta f'z)m-(1-ff')(f+\Delta f'z)=0 \dots (g)$$

et donnera

$$\Delta z = - \frac{[f'z-f'(ff''-f'f)]m^2+z(f+f')m-f(1-ff')}{(f+f')m^2+z(f+f')m-f(1-ff')}$$

expression dont le dénominateur résulte du numérateur par la substitution de f, f' au lieu de f', f' ; on voit que les racines de celui-ci égales à $\pm \sqrt{f(f+f')}$, étant

$$\frac{-f(f+f') \pm \sqrt{(1+f')\{f^2(1+f') + f'f'(1-ff')\}}}{f+f' - f(ff'-f'f)} \dots (h)$$

celles de l'autre seront

$$\frac{-f \pm \sqrt{f(f+f')}}{f+f'} \dots (i)$$

Nous désignerons les premières par a, a' ; les secondes par b, b' ; la

quantité $\frac{f'+f'-f(f'f'-f'f)}{f+f'}$ par F et il viendra

$$\Delta z = -F \frac{(m-a)(m-a')}{(m-b)(m-b')} \dots (ii)$$

D'ailleurs, l'équation $\frac{dz}{dx} = m$ ou $\Delta dx = \frac{\Delta z}{m}$, intégrée par parties, produit

$$\Delta x = C' + \frac{\Delta z}{m} + \int \frac{\Delta z}{m^2} dm \dots (v)$$

on a par conséquent

$$\Delta x = C' + \frac{\Delta z}{m} - F \int \frac{m^2 - (a+a')m + aa'}{m^2(m-b)(m-b')} dm \dots (vi)$$

Pour intégrer cette fraction rationnelle, on la décomposera en fractions partielles $\frac{A}{m} + \frac{A'}{m} + \frac{B}{m-b} + \frac{B'}{m-b'}$ dont il sera aisé d'évaluer les numérateurs; l'intégrale sera $-\frac{\Delta}{m} + A'l \cdot m + Bl \cdot (m-b) + B'l \cdot (m-b')$; on aura donc

$$\Delta x = C' + \frac{\Delta z - AF}{m} - F[A'l \cdot m + Bl \cdot (m-b) + B'l \cdot (m-b')] \dots (v)$$

et en éliminant m entre les équations (v) et (v) on obtiendra celle de la courbe cherchée.

16. Dans l'hypothèse présente, les racines de l'équation (f), se réduisent aux valeurs (h) et l'on a

$$m' = a, \quad m' = a' \dots (vi)$$

détermination qui, comme on l'a vu (v. 14), rend la constante

c nulle. Quant à la constante C' , elle sera déterminée d'après la condition que la courbe passe par le point fixe A.

17°. On obtiendra la valeur maximum P de p, en substituant dans l'expression (b), au lieu de m et de x leurs valeurs tirées de l'équation (f) et de celle de la courbe; ensuite on prendra l'intégrale entre ses limites.

18°. Nous avons supposé le point A fixe sur l'axe HA; s'il eût été variable sur cet axe, de même que le point S, sur HC, nous eussions eu semblablement $x''=0$, $\delta x''=0$; et l'équation déterminée (d) fût devenue $M''=0$, c'est-à-dire,

$$BR^2 m'' - 2AR^2 m'' - (AA'' + BP'') = 0 \dots \dots (h)$$

Faisant ensuite $x=x''=0$, $x=x''$, $m=m''$ dans (e), on aurait une seconde équation entre x'' , m'' , et l'élimination de m'' entre les deux, déterminerait x'' ; par conséquent la constante C' , qui est donnée en fonction de x'' par l'équation de la courbe.

On trouverait ainsi deux valeurs pour x'' , l'une négative et étrangère à la question, l'autre positive et à laquelle répondrait le minimum ou maximum de p; de sorte que le maximum relatif, répond à $x''=x_1$. Ces généralités seront éclaircies dans les cas particuliers que nous allons débiter.

19°. Maintenant supposons $\gamma'=0$, $\xi=0$, & demeurant quelconque, c'est l'hypothèse admise dans la théorie que nous avons exposée: les équations (e) et (f) dont la première devient divisible par le facteur $\gamma + \delta \xi + z$, se réduisent l'une et l'autre à celle-ci

$$m'' + z \frac{f+t}{1-ft} m - 1 = 0 \dots \dots (i)$$

si ce n'est que m' y remplace m, pour la seconde. Cette équation appartient évidemment à la ligne droite et son intégrale qui est

$$[z - C' - x \tan \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)] [z - C' + x \cot \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)] = 0 \dots \dots (16)$$

représente deux droites perpendiculaires entre-elles; la même équation donne

$$m = m' = \tan \frac{1}{2}(\varphi - \alpha) \text{ et } m' = -\cot \frac{1}{2}(\varphi - \alpha) \dots \dots (17)$$

$$\text{En effet, } -\frac{f+t}{1-ft} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{f+t}{1-ft}\right)^2} = -\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} \pm \frac{1}{\sin(\varphi - \alpha)} = \dots$$

$$\frac{1 - \cos(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} \text{ et } -\frac{1 + \cos(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} = \tan \frac{1}{2}(\varphi - \alpha) \text{ et } -\cot \frac{1}{2}(\varphi - \alpha).$$

20°. Des deux droites données par l'équation (16) la seconde divise en deux parties égales, l'angle entre le plan AB et le talus que le fluide affecterait, si sa cohésion était

dérivée; elle seule satisfait à la question.

31°. Ces résultats, indépendamment de la cohésion, demeurent par conséquent les mêmes, lorsque on fait en outre $\gamma=0$, ce qui est le cas usuel de la pratique; mais si c'est $\lambda=0$, qu'on suppose, en outre, ou le plan AB vertical, ils deviennent

$$m^2 + 1 f m - 1 = 0 \dots \dots \dots (18)$$

$$(x - C' - x \tan \frac{1}{2} \varphi)(x - C' + x \cot \frac{1}{2} \varphi) = 0 \dots \dots (19)$$

$$m' = \tan \frac{1}{2} \varphi \text{ et } m'' = -\cot \frac{1}{2} \varphi \dots \dots \dots (20)$$

32°. Dans l'hypothèse $\gamma'=0$, $f=0$, $\lambda=0$, l'expression (b) se réduit à

$$p = \int \frac{\gamma(1+m^2) + \Delta(f+m)x}{1-fm} dx;$$

$$\alpha, m = -\cot \frac{1}{2} \varphi, x = h - x \cot \frac{1}{2} \varphi; \text{ d'où } dx = -dx \tan \frac{1}{2} \varphi, \\ 1+m^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi}, f+m = -\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi}, 1-fm = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi};$$

ainsi, en substituant ces valeurs et intégrant entre les limites $x=0$, $x=h$, on obtiendra

$$P = \frac{1}{2} \Delta h \left(h - \frac{4\gamma}{\Delta \tan \frac{1}{2} \varphi} \right) \tan^2 \frac{1}{2} \varphi;$$

c'est la formule (d') du texte.

33°. En supposant d'avance le point A, fixe sur l'axe HA, nous avons eu immédiatement $x''=C'=h$; mais s'il était regardé comme variable sur HA, il faudrait employer l'équation déterminée (h), qui devient ici

$$\gamma(fm^2 - 1 m'' - f) - (1+f^2)\Delta x'' = 0 \dots \dots \dots (21)$$

or, de son côté, l'équation (15) devient

$$m^2 + 1 f m'' - 1 = 0 \dots \dots \dots (22)$$

et réduit la précédente à $-(1+f^2)(\gamma m'' + \Delta x'') = 0$; d'où $x'' = -\frac{\gamma}{\Delta} m''$, c'est-à-dire

$$x'' = -\frac{\gamma}{\Delta} \tan \frac{1}{2} \varphi, \quad x'' = \frac{\gamma}{\Delta} \cot \frac{1}{2} \varphi \dots \dots (23)$$

par la substitution des valeurs $m'' = \tan \frac{1}{2} \varphi$, $m'' = -\cot \frac{1}{2} \varphi$ tirées de (22).

On sait qu'en général l'équation indéterminée, telle que (b), donne indifféremment le maximum ou le minimum relatif de l'intégrale que l'on considère, tandis que quand les limites sont variables, l'équation déterminée, telle que (d), fournit soit le maximum ou le minimum absolu, soit le maximum du minimum ou réciproquement; c'est dans ce dernier cas que tombe la valeur $x'' = \frac{\gamma}{\Delta} \cot \varphi$, la seule qui convienne à la question. En effet, que l'on différencie

l'expression de P en fonction de x' , par rapport à cette variable, on trouvera $x' = \frac{27}{\Delta \tan \frac{1}{2} \varphi}$ ou la moitié de la valeur de h , laquelle valeur rend P nul, mais non un minimum. On voit d'ailleurs que P augmente avec x' ; de sorte que son maximum relatif répond à $x' = HA = h$.

24°. Le cas de $j' = j$, $f' = f$ comporte des réductions pareilles à celles du N°. 19; mais quand on fait séparément $j' = 0$, ou $f' = 0$, la quantité $j' + \Delta f x$ n'en subit pas moins dans l'équation (c): ce n'est donc que dans la double hypothèse $j' = 0$, $f' = 0$, ou $j' = j$, $f' = f$, que la section AB de la plus grande pression devient rectiligne. Mais, puisque, dans le second cas, la courbure de cette section ne tient qu'à l'écartance de j' et f' , qui, lorsqu'il s'agit de la poussée des terres, sont de petites quantités par rapport à j et f , il est à présumer que la substitution d'une ligne droite à la courbe AB n'écartera pas beaucoup de la vérité.

25°. Les principes établis au commencement de cette note paraissent renfermer les véritables lois de l'équilibre des fluides imparfaits, et suffire pour déterminer en général les pressions que ces fluides exercent sur les parois des vases qui les contiennent.

Coulomb a autre recherché la nature de la courbe AB , dans le cas où $\lambda = 0$, $j = 0$, $f = 0$; mais par la méthode que les premiers analystes ont employée pour résoudre les problèmes des isopérimètres et de la brachystochrone.

Faute du principe (N°. 7) il sort de la supposition $f' = 0$, et tombe dans l'hypothèse $f' = f$; d'ailleurs, comme il ne s'est pas aperçu que la constante C d'intégration est nulle, la nature de la courbe AB , lui a échappé. Si dans l'équation qu'il a obtenue, on fait $B = 0$, $\frac{1}{h} = f$, $dx = -dx$, $y = x$, $dx = m dx$, ou si dans l'équation (c), on pose $\lambda = 0$, $j' = 0$, $f' = f$, on trouve également

$$m^2 + 2 f m - \frac{1-f^2}{2} = 0,$$

équation à la ligne droite.

26°. Supposons que la section AB de la plus grande pression soit généralement rectiligne, et substituons dans l'expression (2) de p , les valeurs $c = \frac{27h}{\cos(\theta - \alpha)}$, $f = \cot \varphi$, $q = \dots$
 $\frac{\Delta h^2 \sin \theta}{2 \cos \alpha \cos(\theta - \alpha)}$, nous aurons

$$p = \frac{\frac{\Delta h^2}{2 \cos \alpha} \sin \theta \sin (\varphi + \alpha - \theta) - \gamma h \sin \varphi - c' \sin (\varphi - \theta) \cos (\theta - \alpha)}{\cos (\varphi - \theta) \cos (\theta - \alpha) + f' \sin (\varphi - \theta) \cos (\theta - \alpha)} \dots (24)$$

et en changeant les produits de sinus et cosinus en cosinus linéaires; puis posant, pour abréger, $\varphi + \alpha - 2\theta = u$,

$$p = \frac{\frac{\Delta h^2}{2 \cos \alpha} \cos u - c' \sin u - \left[\frac{\Delta h^2}{2 \cos \alpha} \cos (\varphi + \alpha) + \gamma h \sin \varphi + c' \sin (\varphi - \alpha) \right]}{\cos u + f' \sin u + \cos (\varphi - \alpha) + f' \sin (\varphi - \alpha)} \dots (25)$$

Pour abréger encore davantage, représentons par A et B respectivement, le terme du numérateur et celui du dénominateur, qui sont indépendants de la variable θ , et sans autre préparation, différencions par rapport à cette variable, nous trouverons tout de suite, pour la condition du maximum de p , l'équation (*)

$$(A+B \frac{\Delta h^2}{2 \cos \alpha} \sin u - (A f' - B c') \cos u + c' + \frac{\Delta h^2}{2 \cos \alpha} f') f' = 0 \dots (26)$$

dans laquelle tang 2θ ne monterait à la vérité qu'au second degré, mais dont le développement serait par trop compliqué.

On en conclut qu'en général la valeur de θ , qui rend p un maximum, varie avec la hauteur h : pour connaître la hauteur h , sous laquelle la plus grande pression est un minimum, il faut évaluer à zéro le coefficient $\frac{dp}{dh}$ et en se servant de l'expression (24), on obtient tout de suite (**)

$$h_1 = \frac{\gamma \sin \varphi \cos \alpha}{\Delta \sin \theta \sin (\varphi + \alpha - \theta)} \dots (27)$$

Pour déterminer la hauteur h_1 sous laquelle la plus grande pression devient nulle, il suffit d'évaluer à zéro le numérateur de la même expression (24), ce qui donne, $\frac{\Delta h^2}{2 \cos \alpha} \sin \theta \sin (\varphi + \alpha - \theta) - \gamma h \sin \varphi - c' \sin (\varphi - \theta) \cos (\theta - \alpha) = 0 \dots (28)$ les hauteurs cherchées et les valeurs de θ , qui y répondent résulteront de l'équation (26) combinée successivement avec l'une et l'autre équation (27) et (28).

Si c' est nul sans que γ le soit, on a par l'équation (28)

$$h_1 = 2 h, \dots (29)$$

il suit de là que dans ce cas la hauteur sous laquelle la

(*) Ce résultat de calcul s'applique avec la même exactitude à l'expression (5), de la note I sur la question des tides (Mémoires de l'officier du Génie, 1844, page 215) et dépend de ces transformations et calculs, par lesquelles l'équation est préparée à la différenciation, qui sont tout-à-fait superflus et deviendraient impraticables dans le cas présent.

(**) Il faudrait différencier l'expression (24), par rapport à h et à θ qui est une fonction de h , déterminer par l'équation (26); mais en vertu de cette équation même, la seconde partie de la différentielle serait nulle.

plus grande pression devient nulle est double de celle à laquelle répond le minimum de cette plus grande pression. L'équation (28) revient à

$$\frac{\Delta h'}{2 \cos \alpha} \cos u = A,$$

comme on le voit par l'expression (25); substituons cette valeur de A dans l'équation (26), où les termes en c' doivent aussi être effacés, nous trouverons

$$\sin u (\cos u + f' \sin u + B) = 0;$$

Or, le second facteur est précisément le dénominateur de l'expression (25) dont le numérateur égale à zéro, a produit (28); c'est donc le premier facteur qui doit être employé à trouver l'angle θ' et la hauteur h' sous lesquels la plus grande pression devient nulle; de sorte qu'on a uniquement

$$\theta' = \frac{1}{2} (\varphi + \alpha) \dots \dots (30)$$

et par la substitution dans (29)

$$h' = \frac{2 \gamma \sin \varphi \cos \alpha}{\Delta \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)} \dots \dots (31)$$

quantité dont la moitié sera la hauteur relative au minimum de la plus grande pression.

Lorsque γ est nul on même temps que c' l'équation (26) devient

$$\frac{\Delta h'}{2 \cos \alpha} \left[\cos (\varphi + \alpha) + B \right] \sin u - f' \cos (\varphi + \alpha) \cos u + f' = 0,$$

et la valeur de θ , qui rend p un maximum est indépendante de h ; l'annulation de ce maximum donne réciproquement

$$h' = 0,$$

indépendamment de θ . On voit donc que dans ce cas non plus que dans le précédent l'équation (26) ne s'applique nullement; ce qui empêche de les appliquer à la pratique.

Si on est autrement dans l'hypothèse $c=0$, $f'=0$, que γ soit nul ou non: l'équation (26) se réduit à

$$\sin u = 0,$$

et quel que soit h , reproduit la valeur (30) pour l'angle du prisme de la plus grande pression P , dont on trouve alors cette expression,

$$P = \frac{\Delta h (h - h') \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)}{2 \cos \alpha \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \alpha)} \dots \dots (32)$$

dans laquelle h' représente la valeur (31), qui est celle de la hauteur à laquelle répond $P=0$; enfin, le minimum P , de P prend la valeur,

$$P = - \frac{\gamma' H' \sin \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \alpha)} \quad (33)$$

qui est essentiellement négative.

Maintenant, si l'on observe, d'une part, que le frottement f des terres contre la maçonnerie et leur adhérence, c'est-à-dire elle, sont beaucoup moindres que le frottement et la cohésion f, c des terres elles-mêmes; d'autre part, que les forces f, c tendent non seulement à retenir les terres sur le plan de rupture, quel qu'il soit, mais encore à augmenter le moment du mur par rapport à l'arête extérieure de la base, on ne fera pas difficulté d'admettre que l'hypothèse $c=0$, $f=0$, tout à la fois favorable à la simplicité du calcul et avantageuse à la stabilité du revêtement, mérite la préférence dans la théorie comme dans la pratique.

III. Sur le N^o 16.

M^o. de Prony (Recherches sur la poussée des terres, 1802) a assigné à l'intégrale (F), (N^o 16), les limites h' et h , qui sont incontestablement les véritables (voir I. N^o 3); jusque là il avait pris, à l'exemple de Coulomb, les limites 0 et h , dont la première est évidemment fautive; car les terres ne seraient pas moins soutenues, quand bien même on supprimerait du plan AB, toute la partie qui répond à la hauteur h' . M^o. Navier, dans son nouvel ouvrage (Application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines) admet aussi les limites 0 et h ; et il en donne pour raison que, quoique la somme des pressions sur l'étendue de plan, relative à h' , se réduise à zéro, néanmoins la somme des moments de ces pressions peut n'être pas nulle.

IV. Sur le N^o 20.

Détermination des principales talus et sections qui en sont inscrites dans les cercles; calcul de la pression parallèle à une section quelconque.

1^o. Lorsque la force p est parallèle à la section AB ou que la pression est dirigée dans cette direction, l'équation d'équilibre, qui est

$$p = q [\cos (\theta - \alpha) - f \sin (\theta - \alpha)] - c \dots (8)$$

revient à celle du N^o 20, quand on fait $p=0$.

Equation qui détermine l'angle de la section parallèlement à laquelle la pression est nulle.

2^o. Si donc on substitue à c, f, q leurs valeurs et que l'on pose $\frac{h'}{h} = m$, l'équation qui déterminera l'angle de la section

pour laquelle la pression parallèle ou non à cette section, est nulle, sera

$$\sin \theta \sin (\varphi + \alpha - \theta) - m \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha) = 0 \dots (9);$$

laquelle, par le développement de $\sin (\varphi + \alpha - \theta)$, devient

$$\text{tang}^2 \theta - \frac{2 \text{tang} \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)}{1 - (1-m) \text{tang}^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)} \text{tang} \theta + \frac{m \text{tang}^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)}{1 - (1-m) \text{tang}^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang} \theta = \text{tang} \frac{1}{2} (\varphi + \alpha) \frac{1 \pm \sqrt{(1-m) [1 + m \text{tang}^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)]}}{1 - (1-m) \text{tang}^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)},$$

résultat analogue à celui de No. de Troncy.

Discussion de cette équation.

3°. Il est clair que $\text{tang} \theta$ sera réel, pourvu que m ne dépasse point l'unité, et comme dans la question matérielle, $\text{tang} \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$ est positif, les valeurs $\text{tang} \theta'$, $\text{tang} \theta''$ de $\text{tang} \theta$ seront toutes deux positives et inégales, ou l'une positive et l'autre négative mais répondant à un arc positif, on se réduira à une seule, selon que $1-m$ sera inférieur ou supérieur ou égal à $\cot^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$; les deux valeurs seront égales entre elles et à $\text{tang} \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$, si $m=1$; enfin, l'une sera nulle et l'autre égale à $\text{tang} (\varphi + \alpha)$, si $m=0$.

Si l'on représente par t' la valeur absolue $\theta - \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$ des angles θ' et θ'' (0° à 90°), l'équation (9) par le changement du produit de sinus en cosinus linéaires et du cosinus de l'arc double en sinus de l'arc simple, donnera $\sin t' = \sin \frac{1}{2} (\varphi + \alpha) \sqrt{1-m}$; d'où l'on conclut $t' < \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$.

Angle de la section de la plus grande pression parallèle à cette section.

4°. La pression parallèle à une section indéterminée, comporte un maximum de même que la pression perpendiculaire au talus extérieur des terres. En effet, l'expression (8) de la pression parallèle à la section, lorsqu'on y remplace c, f, q par leurs valeurs et $\frac{H}{h}$ par m , qu'on y fait ensuite $\theta = \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$, devient

$$\frac{\delta H^2 (1-m) \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)}{2 \sin \varphi \cos \alpha \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \alpha)}$$

fraction dont le dénominateur est essentiellement positif.

Potâ et de ce que $\frac{1}{2} (\theta' + \theta'') = \frac{1}{2} (\varphi + \alpha)$, on conclut que 1°. si l'on a $m < 1$, ou si la pression est reductible à zéro par deux valeurs θ' et θ'' de θ , elle demeure positive dans l'intervalle de ces valeurs et devient négative au-delà; ce qui signifie qu'alors le prisme ne peut de lui-même surmonter le frottement et la cohésion, et devrait pour cet effet, être tiré par une force équivalente à la pression, abstraction faite du

signe; 2° si $m=1$, ou si la fraction n'est réductible à zéro que par une seule valeur de θ , la fraction correspondante à cette valeur est en même temps un maximum, puisque pour toute autre valeur de θ , la fraction devient négative; si l'on a $m>1$, ou si la fraction n'est plus réductible à zéro, elle n'est pas non plus susceptible de maximum. Donc t désignant la valeur de θ , à laquelle répond le maximum de p , et θ' la plus grande des deux valeurs qui rendent p nul, on aura en général $t < \theta' < t > \theta'$.

Equation qui détermine cet angle.

5°. Quant à la valeur de θ , relative au maximum de p , on trouvera l'équation dont elle dépend, en développant dans l'expression (3) de p , le produit $\sin(\theta-\alpha+\alpha) \sin(\varphi-\theta-\alpha)$, effectuant autant qu'il sera possible la division par $\cos(\theta-\alpha)$ et égalant ensuite la différentielle à zéro. Soit pour abréger, $A = \cos \varphi \cos \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\varphi + \alpha)$, on trouvera ainsi

$$\tan^3(\theta-\alpha) + \left[1 + \frac{\cos(\varphi-\alpha)}{A}\right] \tan(\theta-\alpha) - \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{A} = 0.$$

Cette équation n'a qu'une racine réelle, laquelle est positive, nulle ou négative, selon qu'on a $\alpha < \varphi$, $\alpha = \varphi$, $\alpha > \varphi$. Elle se vérifie, dans le cas de $m=1$, par $\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$, c'est-à-dire, $\theta - \alpha = \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$, et, pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'alors $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\varphi - \alpha)$.

Détermination de l'angle et de la hauteur sous lesquels cette plus grande pression devient nulle.

6°. On peut trouver directement les valeurs particulières de θ et de h ou de α ; pour lesquelles cette plus grande pression s'annule: on effet, l'expression de p étant de la forme $\frac{N}{R}$, la condition du maximum sera $R dN - NdR = 0$; mais l'annulation de ce maximum emporte $N=0$, équation qui réduit la précédente à $dN=0$; par conséquent les valeurs cherchées sont déterminées par les deux équations,

$$\left. \begin{aligned} N = \delta H \left[h \sin \theta \sin(\varphi + \alpha - \theta) - h' \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\varphi + \alpha) \right] &= 0, \\ \frac{dN}{d\theta} = \delta H^2 \sin(\varphi + \alpha - 2\theta) &= 0; \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha) \text{ et } h = h' = \frac{2h' \sin \varphi \cos \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} (\varphi + \alpha)},$$

ce qui est l'équation (5) du N°. 10.

Il est aisé encore de reconnaître si l'on a ou non $\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$, quel que soit h ; car, puisque cette valeur de θ satisfait indépendamment de h à $dN=0$ et non à $N=0$, elle ne vérifiera l'équation du maximum qu'elle réduit déjà à $dR=0$, qu'autant qu'elle satisfera de même à cette dernière; or, on a

$$dR = -x \sin \varphi \cos \alpha \sin (\theta - \alpha),$$

résultat qui ne s'évanouit point par la substitution de la valeur $\frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$. On conclut de là que l'angle α de la section de la plus grande poutre parallèle à cette section, varie avec la hauteur h et ne devient $\frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$ que si $h = h'$, auquel cas, cette plus grande poutre s'annule.

En faisant d'avance $h' = 0$, dans les équations (10), ce qui est le cas d'une terre sans cohésion, on a également $\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$, puis $\sin \frac{1}{2}(\varphi + \alpha) = 0$; d'où $\alpha = -\varphi$, indépendamment de h ; c'est l'angle du talus naturel des terres sans cohésion.

7°. (Sur le N. 23). Je fais $\frac{h_1}{h} = m$, j'écris $-\varphi$ au lieu de α dans l'équation (c), puis observant, d'une part, que $\cos \varphi' = \dots \cos(\varphi - \varphi - \varphi) = \cos \varphi \cos(\varphi - \varphi) + \sin \varphi \sin(\varphi - \varphi)$; d'autre part, qu'en général, $2 \sin^2 \frac{1}{2} x = 1 - \cos x$, j'obtiens l'équation

$$\tan^2(\varphi - \varphi') - P \tan(\varphi - \varphi') - Q = 0 \dots \dots (11)$$

P et Q désignant des quantités essentiellement positives. Donc les deux racines sont réelles et de signes contraires.

8°. (Sur le N. 24). On a

$$\tan(\theta - \varphi + \varphi) = \frac{\tan(\theta - \varphi) + \tan \varphi}{1 - \tan(\theta - \varphi) \tan \varphi} = \tan \varphi x$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{(1-m)(1+m \tan^2 \varphi)}}{1 - (1-m) \tan^2 \varphi}, \text{ par l'article 2; d'où l'on tire . . .}$$

$$\tan(\theta - \varphi) = \tan \varphi x \frac{(1-m) \tan^2 \varphi \pm \sqrt{(1-m)(1+m \tan^2 \varphi)}}{1 + m \tan^2 \varphi \pm \tan^2 \varphi \sqrt{(1-m)(1+m \tan^2 \varphi)}}$$

Mettant $\sqrt{1-m}$ en facteur au numérateur et $\sqrt{1+m \tan^2 \varphi}$ au dénominateur, puis supprimant l'autre facteur qui est commun aux deux termes, on trouve $\pm \tan \varphi \sqrt{\frac{1-m}{1+m \tan^2 \varphi}}$, expression qu'on aurait obtenue directement si dans la formation de l'équation qui donne θ' , θ on avait pris pour inconnue $\theta - \alpha$ au lieu de θ . On trouve alors l'équation

$$\tan^2(\theta - \alpha) - \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{A} \tan(\theta - \alpha) + 1 - \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{A} = 0.$$

dans laquelle A désigne la même quantité qu'à l'article 5°.

V. Sur le N. 31.

Hypothèse du frottement.

1°. Nous conserverons les mêmes notations, si ce n'est que nous désignerons par x l'épaisseur du revêtement dans l'hypothèse de la translation, et relativement à la maçonnerie, par f le rapport du frottement à la pression, enfin

Equation qui détermine l'angle du talus naturel des terres cohérentes.

Expression plus simple qui donne l'angle de la section parallèlement à laquelle la pression est nulle.

par γ' la cohésion sur l'unité de surface.

D'abord, la composante horizontale de la pression p d'un prisme quelconque est $p \cos \alpha$, tandis que le frottement dû à la composante verticale est $f' p \sin \alpha$ et il est clair qu'ici l'angle θ du prisme doit être déterminé par la condition que l'excès de la première force sur la seconde soit un maximum; mais cet excès exprimé par

$$p(\cos \alpha - f' \sin \alpha)$$

devient un maximum en même temps que p lui-même; ainsi, dans l'hypothèse actuelle, c'est encore la plus grande pression P , que l'on a à considérer.

Cela posé, le frottement sur la base AF , provenant du poids du trapèze $ABEF$, est

$$f' \delta' H \left[x' - \frac{1}{2} H (\tan \alpha + \tan \varepsilon) \right] \dots \dots (11)$$

et la cohésion du trapèze sur cette même base a pour mesure

$$\gamma' x;$$

Or, la condition de l'équilibre consiste en ce que la première quantité dans laquelle p doit être remplacé par la valeur (d) de P , soit égale à la somme des deux autres, ce qui donne

$$\frac{1}{2} \delta' h (h - H) r^2 \cos \alpha - f' \sin \alpha = f' \delta' H \left[x' - \frac{1}{2} H (\tan \alpha + \tan \varepsilon) \right] + \gamma' x';$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{\delta' r^2 h (h - H) (\frac{1}{2} \tan \alpha) \cos^2 \alpha + \delta' f' H^2 (\tan \alpha + \tan \varepsilon)}{2 (\delta' f' H + \gamma')},$$

valeur générale de l'épaisseur du revêtement dans l'hypothèse du glissement et en regard à la cohésion de la maçonnerie; autre bien qu'à celle des terres. Mais d'une part, les terres avec lesquelles les revêtements sont remplacés, ont perdu, comme nous l'avons déjà dit, toute leur cohésion; d'autre part, la maçonnerie n'acquiert la sienne qu'à la longue; il convient donc de négliger l'une et l'autre résistance ou de faire $f' = 0$, $\gamma' = 0$. Alors on a simplement

$$x' = H \left[\frac{1}{2} \tan \alpha (1 - n r^2 \frac{h}{H} \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f'} n r^2 \frac{h}{H} \cos^2 \alpha + \tan \varepsilon \right) \right] \dots (12)$$

L'hypothèse de la solution convient seule à la pratique.

2°. Maintenant, il est manifeste que pour rendre le revêtement capable de résister à la poussée des terres, il faut lui donner une épaisseur au moins égale à la plus grande des deux valeurs analogues (0) et (12) de x et de x' ; en sorte que si dans tous les cas que présente la pratique, la dernière de ces valeurs était moindre que la première, on pourrait

son tenir à la seule hypothèse de la rotation.

Comme les deux expressions (Q) et (R) ont le même premier terme, il suffira de comparer le radical de l'une avec le second terme de l'autre, et l'on sera autorisé à négliger la considération du glissement, pourvu que dans la pratique on ait toujours

$$\sqrt{\frac{1}{4} \tan^2 \lambda (1 - nr^2 \frac{h^2}{H^2} \cos^2 \lambda) + \frac{1}{3} nr^2 \frac{h^2}{H^3} - \frac{1}{3} (\tan^2 \lambda - \tan^2 \varepsilon)} > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f} nr^2 \frac{h^2}{H^2} \cos^2 \lambda + \tan \varepsilon \right) \quad (12)$$

Or, il résulte des expériences de M.^r Biotard (Traité de la construction des ponts, par Paulthey, tome 1, page 344) que la valeur de f' est au moins 0,75; d'ailleurs on a généralement dans la pratique $\frac{h}{H} < \frac{3}{4}$, $n = \frac{2}{3}$ et, si $\lambda = 0$, $r^2 < \frac{1}{4}$; car le talus naturel des terres dont la cohésion est détruite n'est pas moindre que 30° et son complément φ ne surpasse pas 70° ; donc $\tan \frac{1}{2} \varphi$ est moindre que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est la tangente de $35^\circ 15' 50''$.

Cela posé, nous distinguerons deux cas selon que le parement intérieur est vertical ou incliné:

Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $\lambda = 0$, l'inégalité devient

$$\frac{1}{3} (nr^2 \frac{h^2}{H^3} + \tan^2 \varepsilon) > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f} nr^2 \frac{h^2}{H^2} + \tan \varepsilon \right)^2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{3} f' \frac{h}{H} - \frac{1}{2} \frac{nr^2}{f'} \frac{h^2}{H^2} > \tan \varepsilon - \frac{1}{6} \frac{f'}{nr^2} \frac{H^2}{h^2} \tan^2 \varepsilon,$$

et, en substituant au lieu de f' , $\frac{h}{H}$, n et r^2 , leurs limites numériques,

$$\frac{1}{4} > \tan \varepsilon - \frac{1}{6} \tan^2 \varepsilon,$$

condition qui est satisfaite non seulement par $\varepsilon = 0$; mais encore par toute valeur de $\tan \varepsilon$ qui ne surpasse pas $\frac{1}{2}$; d'où l'on conclut que l'hypothèse du glissement peut être négligée dans le cas où le parement intérieur étant vertical, le parement extérieur l'est aussi ou a un talus dont la bête n'excède point le quart de la hauteur, ce qui comprend tous les talus usités.

Dans le second cas, savoir, quand le parement intérieur est incliné, la conclusion subsiste encore; mais pour s'en assurer, il est plus simple de calculer immédiatement par les formules (Q) et (R), les valeurs de x et de x' , entre les limites de la pratique, comme on l'a fait dans le Memorial de l'Officier du Génie (t.^e 4, page 186), que de

considérer l'inégalité générale (12) dont la discussion se complique beaucoup, à raison des valeurs de la quantité τ ou $\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)}{\cos \alpha \cos \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)}$.

Soient donc $\tan \alpha = \pm \frac{1}{4}$, limite qu'on ne dépasse pas dans la pratique, et alternativement $\varphi = 30^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, valeurs qui répondent, la première aux terres fortes pour lesquelles on suppose $n = \frac{5}{6}$, et les deux autres aux terres légères et moyennes pour lesquelles on prend $n = \frac{3}{4}$. Ces rapports $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$ sont un peu forcés relativement aux terres des qualités extrêmes, mais la conclusion n'en sera que plus certaine.

Les résultats obtenus sont rangés dans le Tableau suivant.

Longueur de l'angle		Épaisseur du revêtement en millimètres de sa hauteur H.					
Du talus avec la verticale.		$\varphi = 30^\circ, n = \frac{5}{6}$		$\varphi = 45^\circ, n = \frac{3}{4}$		$\varphi = 60^\circ, n = \frac{3}{4}$	
$\tan \alpha$	$\tan \varepsilon$	X	X'	X	X'	X	X'
$+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	479	396	539	462	630	538
$+\frac{1}{4}$	0	452	371	516	537	613	473
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	72	33	187	112	364	284
$-\frac{1}{4}$	0	8	négative	150	négative	340	159

La comparaison des deux genres de résultats montre que dans toute l'étendue des limites de α , ε , φ et n , qui circonviennent la pratique, l'hypothèse du glissement donne de moindres épaisseurs que l'hypothèse de la rotation; d'où il s'en suit que cette dernière suffit au calcul des dimensions des revêtements.

Or la vérité, il n'est pas sans exemple qu'un mur de revêtement ait cédé en glissant; mais on doit remarquer que c'est la masse totale du mur et de sa fondation qui a glissé sur un sol argileux et non pas la maçonnerie sur elle-même: un pareil accident n'infirme donc pas la théorie et ne dénote qu'un vice de construction dans les fondations.

VI. Après n.° 34.

Transformation des profils de
Revêtement.

1.° On a vu que le moment m' d'un profil quelconque ABEF. de revêtement, par rapport à l'arête extérieure E, est

$$m' = \frac{1}{2} H \left[\left(X - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right)^2 + \frac{1}{3} H^3 \left(\frac{1}{4} \tan^2 \alpha - \tan^2 \varepsilon \right) \right],$$

et que la surface S' de ce profil a pour expression

$$S' = H \left(x - \frac{1}{2} H \tan \alpha - \frac{1}{2} H \tan \epsilon \right).$$

Soient m et S les valeurs de ces quantités, quand $x = b$ et $\epsilon = e$, il viendra

$$m = \frac{1}{2} H \left[\left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right)^2 + \frac{1}{3} H^2 \left(\frac{1}{2} \tan^2 \alpha - \tan^2 e \right) \right]$$

$$S = H \left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha - \frac{1}{2} H \tan e \right) \dots (5)$$

Cela posé, si $H, b, e, \alpha, \epsilon$ étant donnés, on veut que le premier profil ait la même stabilité que le second, il n'y a qu'à égaler m' à m , ce qui donne

$$x - \frac{1}{2} H \tan \alpha = \sqrt{\left[\left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right)^2 + \frac{1}{3} H^2 \left(\tan^2 e - \tan^2 \epsilon \right) \right]} \dots (5')$$

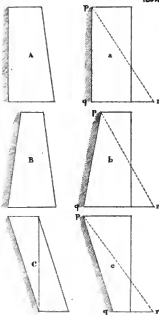
et par conséquent

$$S' = H \sqrt{\left[\left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right)^2 + \frac{1}{3} H^2 \left(\tan^2 e - \tan^2 \epsilon \right) \right]} - \frac{1}{2} H^2 \tan \epsilon \dots (6)$$

On peut donc au moyen de la formule (5) transformer un profil donné en un autre d'une stabilité équivalente et dont le talus extérieur soit différent. Mais il est essentiel d'observer que cette formule suppose le même talus intérieur pour les deux profils; autrement, la poutree changerait de l'un à l'autre et alors il faudrait déduire directement de la formule (4), où l'angle δ de ce talus aura telle valeur qu'on voudra, la base x du nouveau profil.

On la trouve la plus avantageuse
des profils de Roidement.

figure 10.



2°. La question qu'on vient de résoudre fait naître celle-ci qui a une très grande importance dans la pratique: parmi les divers. formes qu'on peut donner au profil d'un revêtement et qui se réduisent aux six A, B, C, a, b, c , quelle est la plus avantageuse principalement sous le rapport de l'économie, c'est-à-dire, quelle est celle d'où résulte, à égale stabilité, la moindre surface du profil?

Cette recherche dont M^r Mayniel s'est occupé, se simplifie par la solution de la question précédente; supposons $e = 0$, dans le profil primitif, e étant quelconque dans le profil transformé et à la même dans les deux; les formules (5), (5') et (6) deviendront

$$x - \frac{1}{2} H \tan \alpha = \sqrt{\left[\left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right)^2 + \frac{1}{3} H^2 \tan^2 \epsilon \right]} \dots (7)$$

$$S = H \left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right) \dots (8)$$

$$S' = H \sqrt{\left[\left(b - \frac{1}{2} H \tan \alpha \right)^2 + \frac{1}{3} H^2 \tan^2 \epsilon \right]} - \frac{1}{2} H^2 \tan \epsilon \dots (9)$$

Or, la condition $S' < S$, qui revient à

$$\tan \epsilon < \frac{b - \frac{1}{2} H \tan \alpha}{H} \dots (10)$$

est généralement satisfaite dans la pratique; car on a toujours $\tan \alpha < \frac{1}{4}$ et $\frac{b}{H} > \frac{1}{2}$; d'où $\tan \epsilon < \frac{3}{12}$.

Ainsi les profils A, B, C conformément respectivement moins de surface que leurs analogues a, b, c; le plus avantageux de tous se trouve donc dans les trois premiers qu'il suffira par conséquent de comparer entre eux; nous ferons cette comparaison d'après des exemples numériques, la formule (1) ne se prêtant point à une discussion en termes généraux, à cause de la complication occasionnée par les différentes valeurs de x .

Ces profils se calculeront, le premier par la formule (p) et les deux autres par la formule (1), dans laquelle $\tan \delta$ sera respectivement positif et négatif. D'ailleurs, y désignant la base supérieure du profil, on aura

$$y = x - H(\tan \delta + \tan \epsilon),$$

$$S = \frac{1}{2} H(x + y).$$

Nous prendrons $H = 10^m$, $h = 12^m$, $n = \frac{1}{2}$, $\varphi = 45^\circ$, supposant successivement $\tan \epsilon = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$, avec $\tan \delta = 0$, pour le profil A et $\tan \delta = \pm \tan \epsilon$, pour les profils B et C.

Le Tableau ci-après confirme les résultats de ce calcul;

Valeurs de $\tan \epsilon$	Valeurs de S pour le Profil.					
	A, où $\tan \delta = 0$,		B, où $\tan \delta$ est positif		C, où $\tan \delta$ est négatif.	
$\frac{1}{5}$	26 ^m ,	32	28 ^m ,	00	20 ^m ,	90
$\frac{1}{6}$	27,	42	29,	15	23,	04
$\frac{1}{10}$	29,	92	31,	34	27,	51

Il prouve que la surface S du profil est moindre sous la forme A que sous la forme B et moindre encore sous la forme C: ainsi, de tous les profils de revêtement, le plus avantageux, c'est-à-dire, celui qui procurerait, à égale surface, la plus grande stabilité, ou, à égale stabilité, la plus petite surface, est le profil C, lequel avec un talus extérieur surplombe vers les terres, l'avantage devenant de plus en plus grand à mesure que le surplomb devient plus considérable; parce que la poussée des terres diminue tandis que le moment du mur augmente; de sorte que si le talus du parement intérieur atteignait le talus naturel des terres, la surface S se réduirait à zéro.

Vaut-on compléter la comparaison? on placera des profils A, B, C à leurs analogues a, b, c, moyennant les formules

(5) et (6) entre lesquelles on éliminera $B - \frac{1}{2} H \tan \alpha$ et qui, dans l'hypothèse de $e = 0$, donneront

$$S' = \sqrt{\left[\left(B + \frac{1}{2} H^2 \tan^2 e \right)^2 - \frac{1}{3} H^4 \tan^2 e \right]},$$

$\tan e$ désignant alors le talus extérieur des premières pentes.

On obtiendra par là les résultats compris dans cet autre tableau;

Valeurs de $\tan e$	Valeurs de S' correspondantes aux précédentes de $\tan \alpha$, pour le profil					
	a, où $\tan \alpha = 0$		B, où $\tan \alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$		c, où $\tan \alpha = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}$	
0	34 ^m	43	36 ^m	30	28,	66
0	34,	43	36,	33	29,	86
0	34,	43	35,	38	32,	00

d'où l'on conclut semblablement que la surface S' du profil est moindre sous la forme a que sous la forme B et moindre encore sous la forme c, mais de plus, que cette surface est susceptible d'un maximum, lequel est compris entre $\tan \alpha = +\frac{1}{3}$ et $\tan \alpha = +\frac{1}{6}$.

On voit aussi que l'une quelconque des formes A, B, C comporte moins de surface, non seulement que son analogue entre les trois a, b, c, mais même que chacune des deux non analogues. Enfin, toute forme composée de deux autres participe des propriétés de celles-ci; c'est ainsi que la forme C qui se compose des deux formes avantageuses A et a a la supériorité absolue; pareillement, dans la forme B qui est une combinaison des formes A, b, l'avantage dû à A est détruit en partie par le désavantage attaché à b.

On emploie encore une épice de profil dérivée par retraites intérieures. En général, la largeur pq est petite relativement à la hauteur qb et les sommets des angles b, p, m se trouvent sur une même droite inclinée tout au plus à $\frac{1}{3}$; et comme les terres pressent les faces horizontales mn, pq, aussi bien que les faces verticales am, np, qb, on peut, sans erreur sensible, substituer à la ligne discontinue am np qb, la droite cd, passant par les milieux des horizontales mn, pq, ou que la pression sur cette droite se décomposera en une force horizontale et une autre verticale. Alors, on reconnaît, indépendamment de tout calcul, que

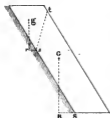
figure 11.



le profil discontinu est moins avantageux que le profil rectiligne. En effet, pour transformer le premier dans le second il suffit de mettre chaque triangle supérieur plein gmh , à la place de l'inférieur vide gac , qui lui est égal; or, dans cette transformation, la quantité de surface est conservée, mais le moment est visiblement augmenté; donc, à égale stabilité, le profil transformé aura moins de surface que le profil primitif.

La discussion des formes de revêtement n'a eu pour objet que l'économie de la maçonnerie; autre son application à la pratique est-elle sujette à restriction. D'abord, le talus extérieur est alors limité: on a observé que les écoulements causés par les pluies et par la végétation des plantes, se forment d'autant plus facilement que ce talus est plus fort, ce qui en a déterminé la réduction de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{4}$, dans la fortification; ensuite, le surplomb intérieur, si favorable à l'économie, ne doit être employé qu'avec mesure: il faut non seulement que le centre de gravité du mur ne tombe point hors de la base, du côté des terres; il faut encore que le moment de la cohésion de la maçonnerie, suivant une secante quelconque st , par rapport à l'extrémité s , surpasse le moment du poids du trapèze supérieur, par rapport au même point, sans quoi la maçonnerie s'appuyant en partie sur les terres et celles-ci s'affaissant sous la pression, il arriverait que le mur deviendrait de ce côté et tout au moins se lézarderait à son parement extérieur.

figure 12.



VII. Après le N.º 36.

Moyen de diminuer l'excès de
cette largeur.

Cette excessive largeur des fondations a fait naître l'idée de chercher à la diminuer, en donnant un talus iK' au parement opposé à la poutée et ne conservant qu'une retraite extérieure, égale à l'intérieure. Comme alors le centre de gravité du massif ne répond plus au centre de figure ou milieu I de la base, le poids de ce massif se combine avec les deux autres forces, ce qui diminue effectivement la grandeur de DL . Il est évident que c'est la différence des moments du profil $ABEF$ et du triangle $iK'K$, qu'on doit égaler au moment de la poutée. Mais parce que l'équation du second degré qu'on obtient par là, se

trouve trop compliquée, vu le grand nombre de données, et que la formule qui en résulte n'est pas d'un usage aisé, nous nous dispenserons de les rapporter ici (Voyez le N.^o cité du *Mémorial*). Au lieu de se servir de cette formule, il sera beaucoup plus simple et suffisamment exact de déterminer, comme précédemment, les forces OP, OQ en grandeur et en direction et de construire ensuite le point K , au moyen d'une courbe d'erreurs. Ayant pris une distance arbitraire Dd , on cherchera le centre de gravité du trapèze $CDdi$ dont on calculera le poids; on construira la résultante de ce poids et des forces OP, OQ ; soit F le point où sa direction rencontre DK , on portera la différence $Df - fd$ sur la perpendiculaire de , d'un côté ou de l'autre par rapport à DK , selon que cette différence sera positive ou négative et trois opérations semblables détermineront la petite courbe ee' , dont l'intersection avec DK donnera le point cherché K' .

Fin.

SEN 6033:8



